Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass in der Situation von Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9 gilt: Ist W' ein weiterer Komplementärraum von $V^\perp$ in V, also $V = V^\perp \oplus W$ und $V = V^\perp \oplus W'$, so sind W und W', betrachtet als quadratische Räume, äquivalent.

Hinweis. Zeigen Sie genauer, dass die natürliche Abbildung von W nach W' (welche Abbildung ist das?) eine Äquivalenz vermittelt.

Aufgabe 2
Sei $A \in M_n(K)$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass die Strukturmatrix der durch A induzierten quadratischen Form q_A auf K^n, definiert durch $q_A(x) = x^t Ax$, bezüglich der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ exakt A ist.

Hinweis. Was ist $q_A(x, y)$?

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die Kongruenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M_n(K)$ ist.

Hinweis. $(S^{-1})^t = (S^t)^{-1}$ (Warum?).

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Äquivalenz tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Räume ist.

Aufgabe 5
Sei $A \in M_n(K)$ symmetrisch, sei $S \in GL_n(K)$ und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass, falls

$$S^t AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

die Matrix S, verstanden als Automorphismus von K^n, eine Isometrie

$$S\colon (K^n, [a_1, \ldots, a_n]) \to (K^n, q_A)$$

vermittelt.

Hinweis. Hier ist $q_A(x) = x^t Ax$ die von A induzierte quadratische Form.