Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Blatt 0

Aufgabe 1

Seien U_1, U_2, U_3 Teilräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Wir setzen

$$\begin{aligned} V_1 &:= (U_1 + U_2) \cap U_3 \\ V_2 &:= (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \\ V_3 &:= (U_1 \cap U_2) + U_3 \\ V_4 &:= (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $V_2 \subset V_1$ und $V_3 \subset V_4$.

(b) $\dim V_1 - \dim V_2 = \dim V_4 - \dim V_3$.

Hinweis. Dimensionsformel für Summen.

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ heißt *rekursiv von der Ordnung* $k \geq 1$, wenn eine Rekursionsformel der Form

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1} \tag{1}$$

mit festen $c_i \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Bezeichne mit W den Teilraum der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, die der Rekursion (1) genügen. Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ bezeichne weiter mit $A_n \in \mathbb{R}^k$ den Vektor

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie eine $k \times k$ Matrix M an mit $A_n = M^n A_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass $\dim W = k$. **Das charakteristische Polynom von M habe im weiteren k paarweise verschiedene Nullstellen** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (M ist dann insbesondere diagonalisierbar. Warum?).

(b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3, \ldots)$ $(i = 1, \ldots, k)$ eine Basis von W bilden.

(c) Geben Sie eine konkrete Diagonalisierung von M an, also eine invertierbare Matrix $S \in GL_k(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = D$, wobei

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

(d) Geben Sie für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ eine explizite Formel für a_n in Abhängigkeit von A_0 und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ an.

(e) Diskutieren Sie die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}$.