Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^2 = id_V$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) f ist Isomorphismus.

(b) f kann nur die Eigenwerte -1 oder 1 haben.

(c) f ist diagonalisierbar.

Hinweis. Teil (c): Beweisen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass V immer die (direkte) Summe der zwei möglichen Eigenräume ist, d.h.

$$V \;=\; \mathrm{Kern}(f - id_V) \oplus \mathrm{Kern}(f + id_V)\,.$$

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 1 & c^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ für festes $c \in \mathbb{Q}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ für feste $a, b \in \mathbb{Q}$.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbare Endomorphismen von V. Es gelte $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass V eine Basis aus *simultanen* Eigenvektoren von f und g besitzt.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass f für jeden Eigenwert λ von g den Eigenraum $V(g, \lambda)$ in sich selbst abbildet. Ist die entsprechende Einschränkung von f auf $V(g, \lambda)$ diagonalisierbar? Verwenden Sie die Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit durch Minimalpolynome.

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $A \in M_n(K)$ und sei $p \in K[X]$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Ist v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist v Eigenvektor von $p(A)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

(b) Ist A trigonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so ist auch $p(A)$ trigonalisierbar mit den Eigenwerten $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_r)$.

Hinweis. Teil (b): Zeigen Sie, dass $p(A)$ ähnlich zu $p(U)$ ist, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist (A selbst ist nach Voraussetzung ähnlich zu einer oberen Dreicksmatrix). Zeigen Sie weiter, dass $p(U)$ ebenfalls obere Dreiecksgestalt hat.

(2+3 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 25.10.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128