Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass zwei Polynome $f, g \in K[X]$ genau dann relativ prim sind, wenn gilt

$$(f) + (g) = K[X]\,.$$

Hinweis. Die Summe $I + J$ zweier Ideale $I, J \subset K[X]$ wird definiert als

$$I + J := \{x + y \mid x \in I \text{ und } y \in J\}\,.$$

Das ist erneut ein Ideal (vgl. Präsenzübungsblatt 5).

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Sei V ein K-Vektorraum und sei $S \subset \mathrm{End}(V)$ eine Menge von Endomorphismen von V. Zeigen Sie, dass für S-invariante Teilräume U, W von V auch deren Summe $U+W$ und Schnitt $U \cap W$ S-invariant sind.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Seien $0 \neq f, g \in K[X]$. Durch sukzessive Anwendung der "Division mit Rest" erhält man ein endliches Schema

$$\begin{array}{rcll}
g & = & q_0 f \;\, + r_1 & \quad \mathrm{Grad}(r_1) < \mathrm{Grad}(f) \\
f & = & q_1 r_1 + r_2 & \quad \mathrm{Grad}(r_2) < \mathrm{Grad}(r_1) \\
r_1 & = & q_2 r_2 + r_3 & \quad \mathrm{Grad}(r_3) < \mathrm{Grad}(r_2) \\
r_2 & = & q_3 r_3 + r_4 & \quad \mathrm{Grad}(r_4) < \mathrm{Grad}(r_3) \\
 & \vdots & & \\
r_{n-1} & = & q_n r_n + 0 & \quad .
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$ggT(f, g) = r_n$$

und bestimmen Sie $x, y \in K[X]$ mit

$$xf + yg = r_n\,.$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Lösen Sie Aufgabe 4 auf Übungsblatt 4 nochmal durch Anwendung des Schemas aus obiger Aufgabe 3.

Hinweis. Division mit Rest bedeutet hier Polynomdivision.

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$V = \mathrm{Bild}(f^n) \oplus \mathrm{Kern}(f^n)$$

für alle $n \geq N$.

Hinweis. Betrachten Sie die aufsteigenden bzw. absteigenden Ketten

$$\{0\} \subset \mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Kern}(f^2) \subset \mathrm{Kern}(f^3) \subset \dots$$

und

$$V \supset \mathrm{Bild}(f) \supset \mathrm{Bild}(f^2) \supset \mathrm{Bild}(f^3) \supset \dots$$

und verwenden Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 15.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128