Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Blatt 6

Aufgabe 1
Trigonalisieren Sie (falls möglich) die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim V = n \geq 1$ und sei f ein Endomorphismus von V mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f = (-1)^n (X - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_r)^{m_r}$$

mit $r \geq 1$, paarweise verschiedenen $\alpha_i \in K$ und gewissen $m_i \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Haupträume

$$U_i = \mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^{m_i}$$

gilt

$$\dim U_i = m_i .$$

(b) Zeigen Sie außerdem, dass für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $m \geq m_i$ gilt

$$\mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^{m_i} \;=\; \mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^{m} .$$

(c) Setze für $1 \leq i \leq r$

$$d_i := \min\{l \mid \mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^l = \mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^{l+1}\} .$$

Zeigen Sie, dass gilt $1 \leq d_i \leq m_i$ und

$$U_i = \mathrm{Kern}(f - \alpha_i id_V)^{d_i} .$$

(d) Zeigen Sie, dass für das Minimalpolynom μ_f von f gilt

$$\mu_f \mid (X - \alpha_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_r)^{d_r} ,$$

Hinweis. Teil (a): Wir wissen, dass gilt $\dim U_1 + \ldots + \dim U_r = n$ und $m_1 + \ldots + m_r = n$. Teil (d): Tatsächlich gilt sogar Gleichheit. Das soll hier aber nicht gezeigt werden.

(3+2+1+2 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Haupträume der folgenden Matrizen (sofern das charakteristische Polynom über dem angegebenen Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt):

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim V = n \geq 1$ und sei f ein Endomorphismus von V. Gegeben sei eine echt aufsteigende Kette der Form

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Kern}(f) \subsetneq \mathrm{Kern}(f^2) \subsetneq \mathrm{Kern}(f^3) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Kern}(f^d),$$

wobei $d \geq 1$ (und notwendig $d \leq n$). Zeigen Sie, dass für beliebige $v \in \mathrm{Kern}(f^d) \setminus \mathrm{Kern}(f^{d-1})$ gilt:

(a) $f^k(v) \in \mathrm{Kern}(f^{d-k}) \setminus \mathrm{Kern}(f^{d-k-1})$ für alle $0 \leq k \leq d-1$.

(b) Die Vektoren
$$v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{d-1}(v)$$
sind linear unabhängig.

(Insbesondere ist V also f-zyklisch ist, falls es eine solche Kette mit $d = n$ gibt.)

(1+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 22.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128