**Universität Bielefeld** **Wintersemester 2018/2019**
**C. Huck**

## Übungen zur Vorlesung

# Lineare Algebra II

## Blatt 10

**Aufgabe 1**
Sei $\beta$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$, und sei $U$ ein Teilraum von $V$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Einschränkung $\beta_{|U}$ von $\beta$ auf $U$ ist nicht-ausgeartet.

(ii) $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

(iii) $U + U^{\perp} = V$.

(iv) Die Einschränkung $\beta_{|U^{\perp}}$ von $\beta$ auf $U^{\perp}$ ist nicht-ausgeartet.

*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst die Äquivalenz von $(i)$ bis $(iii)$.

**(4 Punkte)**

**Aufgabe 2**
Sei $q$ eine quadratische Form auf dem $n$-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Zeigen Sie, dass gilt: Ist $v_1, \ldots, v_m$ ein System von Vektoren aus $V$, für welches die $m \times m$-Matrix $(q(v_i, v_j))_{ij}$ nicht singulär (d.h. invertierbar) ist, so sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

**(3 Punkte)**

**Aufgabe 3**
Sind die folgenden quadratischen Formen äquivalent über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $q_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ und $q_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$.

(b) $q_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ und $q_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 5x_1^2 + 10x_1x_2 + 4x_2^2$.

**(4+4 Punkte)**

**Aufgabe 4**
Seien $(V, q)$ und $(V', q')$ quadratische Räume und sei $s\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung mit $q'(sx) = q(x)$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass $s$ injektiv ist, falls $q$ nicht-ausgeartet ist.

**(1 Punkt)**

**Abgabe bis Donnerstag, 20.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**