Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Blatt 11

Aufgabe 1
Bestimmen Sie eine Diagonalform, die äquivalent ist zu der quadratischen Form

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 \,.$$

auf $\mathbb{Q}^3$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Beweisen Sie die folgenden Aussagen für einen n-dimensionalen quadratischen Raum (V, q).

(a) Wird $a \in K \setminus \{0\}$ dargestellt durch q, d.h. es gibt ein $v \in V$ mit $q(v) = a$, so gilt

$$q \simeq [a, a_2, \ldots, a_n]$$

mit gewissen $a_2, \ldots, a_n \in K$.

(b) Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ mit $a + b \neq 0$ gilt

$$[a, b] \simeq [a + b, (a + b)ab]$$

Hinweis. Teil (a): Existenz von Orthogonalbasen (Beweis rekapitulieren!). Teil (b): Verwenden Sie Teil (a).

(2+3 Punkte)

Aufgabe 3
Sei (V, q) ein n-dimensionaler, nicht-ausgearteter und isotroper quadratischer Raum. Zeigen Sie, dass q jedes Element von K darstellt.

Hinweis. Wie in der Vorlesung nehmen wir stets an, dass $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $K = \mathbb{C}$ und sei (V, q) ein n-dimensionaler, nicht-ausgearteter quadratischer Raum über K. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Es gibt eine *Orthonormalbasis* von V, d.h. eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V mit

$$q(b_i, b_j) = \delta_{ij}$$

für alle i, j.

(b) q ist äquivalent zur Einheitsform auf $\mathbb{C}^n$.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Sei s eine Isometrie bezüglich der Einheitsform auf $\mathbb{R}^2$ mit $\det(s) = 1$, also $s \in SO(\mathbb{R}^2, q_E)$. Zeigen Sie, dass es ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ gibt, sodass s bezüglich der kanonischen Basis die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

hat. s ist also eine Drehung um den Ursprung.

(3 Punkte)

Ich wünsche Ihnen frohe Weihnachten
und ein gutes neues Jahr!

Abgabe bis Donnerstag, 10.01.2019, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128