Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1

Sei $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$.

(a) Zeigen Sie, dass q eine positiv definite quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie eine Basis von

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$$

und eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, q)$.

Hinweis. Teil (a): Insbesondere ist zu zeigen, dass q überhaupt eine quadratische Form ist.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 2

Für symmetrische Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ schreiben wir $A < B$, falls $B - A$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$.

(b) Aus $0 < AB$ folgt $0 < BA$.

Hinweis. Teil (b): Hier bezeichnet $0 \in M_n(\mathbb{R})$ die $n \times n$ Nullmatrix.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 3

Sei (V, q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum und sei q nicht-ausgeartete quadratische Form. Sei weiter $f\colon V \to V$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$ und

$$q(f(x) - f(y)) \;=\; q(x - y)$$

für alle $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass f notwendig eine lineare Abbildung (und damit eine Isometrie von (V, q)) ist.

Hinweis. Zeigen/Beantworten Sie zunächst:

(1) $q(f(x), f(y)) = q(x, y)$.

(2) Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthogonalbasis von V, so ist auch $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ eine Orthogonalbasis von V.

(3) Was folgt aus den Gleichungen $q(f(ax+by) - af(x) - bf(y), f(b_i)) = 0$, wobei $i = 1, \ldots, n$?

(6 Punkte)

Aufgabe 4
Sei s eine Isometrie eines nicht-ausgearteten n-dimensionalen quadratischen Raumes (V, q). Sei v ein anisotroper Vektor von V so, dass auch $s(v) - v$ anisotrop ist. Zeigen Sie, dass es eine Spiegelung s_0 gibt mit $(s_0 s)(v) = v$. D.h. v ist anisotroper Fixpunkt der Komposition $s_0 s$.

Hinweis. Überführen Sie die Skizze aus der Vorlesung in einen formalen Beweis.

(3 Punkte)

Aufgabe 5
Sei (V, q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum und sei s eine Isometrie, die darstellbar als Produkt von $r < n$ Spiegelungen $s_1, \ldots, s_r$ an Hyperebenen $H_1, \ldots, H_r$ ist. Beweisen Sie, dass ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $s(v) = v$ existiert.

(3 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 17.01.2019, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128