Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 13 (Letztes Übungsblatt)

Aufgabe 1
Wenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf das folgende System von Vektoren des euklidischen Vektorraums $V = (\mathbb{R}^3, q_E)$ an.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Sei q eine quadratische Form auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass q genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn es eine positiv definite symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit

$$q(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ bezeichne).

(2 Punkte)

Aufgabe 3
Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts), die aus Eigenvektoren von A besteht, und geben Sie ein $S \in O(3, \mathbb{R})$ an, sodass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist. Welche Signatur hat die von A vermittelte quadratische Form q_A?

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Für jeden Teilraum U von V gilt dann $V = U \perp U^\perp$. Sei $p_U : V \to V$ gegeben durch $p_U(u + w) = u$ für $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Offenbar ist p_U eine lineare Abbildung und heißt *Orthogonalprojektion von V auf $U (= p_U(V))$*. Zeigen Sie, dass für $p \in \mathrm{End}(V)$ äquivalent sind:

(i) p ist Orthogonalprojektion von V auf $U := p(V)$.

(ii) p ist selbstadjungiert, und es gilt $p^2 = p$.

(iii) Es gilt $p^2 = p$ und $\|p(x)\| \leq \|x\|$ für alle $x \in V$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5
Führen Sie die Hauptachsentransformation für die durch

(a) $xy = 1$

(b) $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$

(c) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 9$

definierten Punktmengen des $\mathbb{R}^2$ durch.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 24.01.2019, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128