Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 14 (Ohne Wertung – Klausurübungen)

Aufgabe 1
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei h eine Sesquilinearform auf V. Für alle $x \in V$ schreibe man $h(x) := h(x, x)$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$h(x,y) \;=\; \frac{1}{4}\big(h(x+y) - h(x-y) + ih(x+iy) - ih(x-iy)\big)\,.$$

Die Funktion h ist also durch ihre Wirkung auf Diagonalelementen (x, x) (wobei $x \in V$) eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2
Sei $V := M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass durch

$$(A,B) \mapsto \langle A,B\rangle := \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}(AB^*)\,,$$

wobei $B^* = \overline{B}^t$, ein Skalarprodukt des $\mathbb{C}$-Vektorraums V gegeben ist.

Aufgabe 3
Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und sei $U \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ die Menge aller selbstadjungierten Endomorphismen.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Teilraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ist und bestimmen Sie die Dimension von U über $\mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass U kein Teilraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ist.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C([0,1])$ der stetigen reellwertigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ durch

$$q(f) \;:=\; \int_0^1 f^2(x)dx$$

eine positiv definite quadratische Form gegeben ist. Wie lautet die Fortsetzung von q zu einer symmetrischen Bilinearform auf V (also mit $q(f,f) = q(f)$) explizit? Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Funktionen $f_0, \ldots, f_{n-1} \in V$, gegeben durch $f_i(x) = x^i$, linear unabhängig sind und bestimmen Sie die Strukturmatrix von q, eingeschränkt auf die n-dimensionale lineare Hülle der $f_0, \ldots, f_{n-1}$, bzgl. genau dieser Basis. Wenden Sie schließlich das Schmidtsche Verfahren an, um eine Orthonormalbasis der 3-dimensionalen linearen Hülle $\langle f_0, f_1, f_2\rangle$ zu bestimmen.

Aufgabe 5
Sei (V, q) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f \in O(V, q)$. Zeigen Sie, dass f nur die Eigenwerte ± 1 haben kann.