Dr. Matthieu Felsinger
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2014

Universität Bielefeld

Klausur *Mathematik für Biologen und Biotechnologen (240109)*

2. Termin am 23. September 2014

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben ist die folgende Liste mit sechs Zuordnungsvorschriften von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f_1(x) = (x+1)^2 + 2$, $\quad f_2(x) = (x-1)^2 + 1$, $\quad f_3(x) = (x-1)^2 + 2$,

$f_4(x) = 1 - (x-2)^2$, $\quad f_5(x) = 1 - (x+2)^2$, $\quad f_6(x) = -(x-2)^2 - 1$.

Die zwei Schaubilder A und B unten zeigen die Graphen von zwei dieser Funktionen. Geben Sie (ohne Begründung) an, welche Funktionsvorschrift zu Schaubild A gehört, und welche zu Schaubild B gehört.

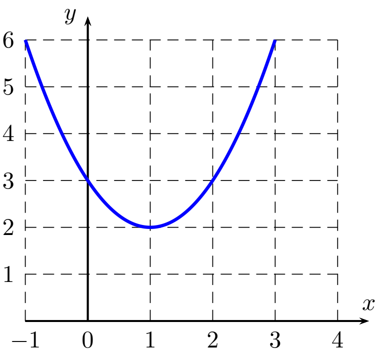

Schaubild A

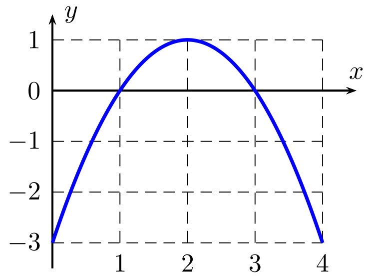

Schaubild B

Lösung:
Die Funktion f_3 gehört zu Schaubild A und die Funktion f_4 zu Schaubild B.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Schreiben Sie die Menge $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \left| x + \frac{1}{5} \right| < 3 \right\}$ als Intervall.

b) Bestimmen Sie alle $t \in [-7\pi, 0]$, für die $2\sin(t) = -\sqrt{2}$ gilt.

Lösung:

a) Wir unterscheiden für $x + \frac{1}{5}$ zwei Fälle:
Fall 1: $x - \frac{1}{5} \geq 0$. In diesem Fall lautet die Bedingung an x

$$x + \frac{1}{5} < 3 \iff x < 3 - \frac{1}{5} \iff x < \frac{14}{5}.$$

Fall 2: $x - \frac{1}{5} < 0$. In diesem Fall lautet die Bedingung an x

$$-x - \frac{1}{5} < 3 \iff x > -3 - \frac{1}{5} \iff x > -\frac{16}{5}.$$

Folglich ist $M = \left(-\frac{16}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

b) Es gilt:

$$\sin(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } t \in [0, 2\pi] \iff t \in \left\{ \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}.$$

Aufgrund der Eigenschaft, dass sich die Werte der Sinusfunktion im Abstand 2π wiederholen – d.h. $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ – ergibt sich

$$\sin(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } t \in [-7\pi, 0] \iff t \in \left\{ -\frac{27}{4}\pi, -\frac{25}{4}\pi, -\frac{19}{4}\pi, -\frac{17}{4}\pi, -\frac{11}{4}\pi, -\frac{9}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi \right\}.$$

Aufgabe 3 (13 Punkte)

a) Berechnen Sie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^k$ unter Verwendung der Formel für geometrische Reihen.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x^3 + x + 5)\,.$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Lösungen besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$? Es ist zur Beantwortung dieser Frage *nicht* notwendig, das Gleichungssystem zu lösen.

Lösung:

a) Wir verwenden die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^k\right] - 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}.$$

b) Mit der Produkt- und Kettenregel erhalten wir für die Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{\sin(x^3+x+5)}{x} + \ln(x)\cdot(3x^2+1)\cdot\cos(x^3+x+5).$$

c) Mit der Regel von Sarrus für 3×3-Matrizen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Somit besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Ein isoliert lebender Stamm von insgesamt 15.000 Menschen wird vom Ebolavirus befallen. Bereits nach 10 Tagen haben sich 30 Menschen mit dem Virus infiziert.
Bestimmen Sie ausgehend vom logistischen Wachstumsmodell eine Funktion, welche die Anzahl $E(t)$ an erkrankten Menschen nach t Tagen angibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass zu Beobachtungsbeginn genau eine Person erkrankt ist.
Nach welcher Zeitspanne werden 80 % des Stammes mit dem Virus infiziert sein?

Lösung:
Im Allgemeinen lautet die Zuordnungsvorschrift für Funktionen, welche der Gesetzmäßigkeit des logistischen Wachstums genügen

$$E(t) = \frac{E(0) \cdot S}{E(0) + (S - E(0)) \exp(-Skt)}, \quad (S, k > 0).$$

Der Stamm besteht aus 15.000 Menschen, d.h. $S = 15000$. Des Weiteren gilt $E(0) = 1$. Also können wir den Parameter $k > 0$ wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} E(10) = 30 &\iff \frac{15000}{1 + 14999 \cdot \exp(-15000 \cdot k \cdot 10)} = 30 \\ &\iff 500 = 1 + 14999 \exp(-150000 \cdot k) \\ &\iff k = \frac{-\ln(\frac{499}{14999})}{150000} \approx 2{,}2688 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$E(t) = \frac{15000}{1 + 14999 \exp(-0{,}3403 \cdot t)}.$$

Gesucht ist dasjenige $t > 0$, welches $E(t) = 12000$ erfüllt.

$$\begin{aligned} E(t) = 12000 &\iff \frac{15000}{1 + 14999 \exp(-0,3403t)} = 12000 \iff \frac{5}{4} = 1 + 14999 \exp(-0,3403t) \\ &\iff \exp(-0,3403t) = \frac{1}{4 \cdot 14999} \iff t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{59996}\right)}{0{,}3403} \approx 32{,}33. \end{aligned}$$

Nach etwa 32 Tagen sind 80% des Stammes mit dem Virus infiziert.

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} und bestimmen Sie damit die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir bestimmen A^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \longleftarrow + \\ \mid \cdot (1/2) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow + \quad \longleftarrow + \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Somit ist die inverse Matrix A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (13 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \left(\frac{-1}{2}\,x^2 - x + \frac{5}{2}\right) e^{-2x}\,.$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.
Geben Sie außerdem die Grenzwerte von f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an.

Lösung:
Mit der Produkt- und Kettenregel erhalten wir als erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x-1)e^{-2x} + (-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2})(-2)e^{-2x} \\ &= e^{-2x}(x^2 + x - 6). \end{aligned}$$

Da $e^{-2x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind die kritischen Punkte genau die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Die beiden kritischen Punkte sind also

$$x_{1/2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{-1}{2} \pm \frac{5}{2}, \quad \text{also } x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 2.$$

Entscheidend für das Vorzeichen der ersten Ableitung ist das Vorzeichen der quadratischen Funktion $x \mapsto x^2 + x - 6$. Diese Parabel ist nach oben geöffnet. Daher liegt bei x_1 ein Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$ vor; x_1 ist ein lokales Maximum. Außerdem liegt bei x_2 ein Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$ vor; x_2 ist ein lokales Minimum.
Des Weiteren gilt:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x}(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}) = -\infty.$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Der Verlauf der Dosierung werde durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-t/4} + 1.$$

Hierbei bezeichnet $t \in [0, 24]$ die Zeit in Stunden. Begonnen wird also mit einer Dosierung von 1 mg/h. Berechnen Sie die insgesamt verabreichte Menge des Medikamentes, wenn die Infusion 24 Stunden angelegt ist.

Lösung:
Die im Zeitraum $[0, 24]$ verabreichte Menge des Medikamentes lässt sich durch die Integration von f auf dem Intervall $[0, 24]$ berechnen, also

$$\begin{aligned}
\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{24} 2 \cdot t \cdot e^{-t/4} + 1\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{24} 2 \cdot t \cdot e^{-t/4}\,\mathrm{d}t + \int_0^{24} 1\,\mathrm{d}t \\
&= \left(2 \cdot (-4) \cdot t \cdot e^{-t/4}\right)\Big|_0^{24} - \int_0^{24} 2 \cdot (-4) \cdot e^{-t/4}\,\mathrm{d}t + 24 \\
&= -192e^{-6} + \left(8 \cdot (-4) \cdot e^{-t/4}\right)\Big|_0^{24} + 24 \\
&= -192e^{-6} - 32e^{-6} + 32 + 24 \\
&= 56 - 224e^{-6} \approx 55{,}44.
\end{aligned}$$

Der Patient erhält innerhalb von 24 Stunden etwa 55,44 mg des Medikamentes.