Dr. Matthieu Felsinger
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2014

Klausur *Mathematik für Biologen und Biotechnologen (240109)*

1. Termin am 24. Juli 2014

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben ist die folgende Liste mit sechs Zuordnungsvorschriften von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f_1(x) = \cos(3x)$, $\quad f_2(x) = 3\cos(x)$, $\quad f_3(x) = \sin(3x)$,

$f_4(x) = 3\sin(x)$, $\quad f_5(x) = 3\sin(2x)$, $\quad f_6(x) = 3\cos(2x)$.

Die zwei Schaubilder A und B unten zeigen die Graphen von zwei dieser Funktionen. Geben Sie (ohne Begründung) an, welche Funktionsvorschrift zu Schaubild A gehört, und welche zu Schaubild B gehört.

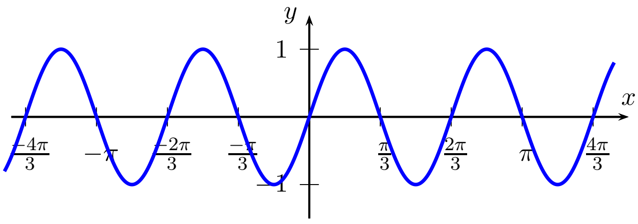

Schaubild A

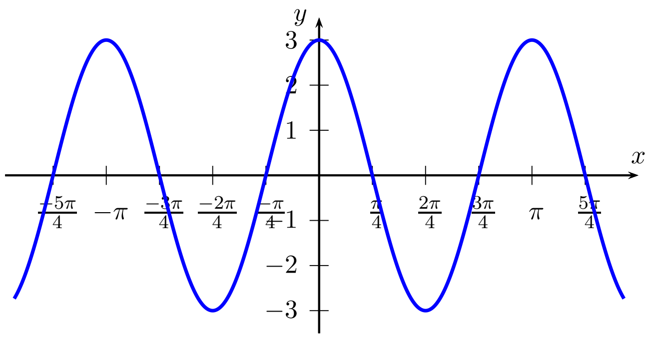

Schaubild B

Lösung:
Die Funktion f_3 gehört zu Schaubild A und die Funktion f_6 zu Schaubild B.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Schreiben Sie die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{R}\colon \left|x - \frac{2}{3}\right| < 6\right\}$ als Intervall.

b) Bestimmen Sie alle $t \in [0, 5\pi]$, für die $2\cos(t) = -\sqrt{3}$ gilt.

Lösung:

a) Wir unterscheiden für $x - \frac{2}{3}$ zwei Fälle:
Fall 1: $x - \frac{2}{3} \geq 0$. In diesem Fall lautet die Bedingung an x

$$x - \frac{2}{3} < 6 \iff x < 6 + \frac{2}{3} \iff x < \frac{20}{3}.$$

Fall 2: $x - \frac{2}{3} < 0$. In diesem Fall lautet die Bedingung an x

$$-x + \frac{2}{3} < 6 \iff -x < 6 - \frac{2}{3} \iff x > -\frac{16}{3}.$$

Folglich ist $M = (-\frac{16}{3}, \frac{20}{3})$.

b) Es gilt:

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } t \in [0, 2\pi] \iff t \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right\}.$$

Aus der (2π)-Periodizität ergibt sich

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } t \in [0, 5\pi] \iff t \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}.$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{22} \left(\frac{6}{7}\right)^k$ unter Verwendung der Formel für geometrische Reihen.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x^3 + x + 5)\,.$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Wie viele Lösungen besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$? Es ist zur Beantwortung dieser Frage *nicht* notwendig, das Gleichungssystem zu lösen.

Lösung:

a) Wir verwenden die Formel der geometrische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{22} \left(\frac{6}{7}\right)^k = \left[\sum_{k=0}^{22} \left(\frac{6}{7}\right)^k\right] - 1 = \frac{1-\left(\frac{6}{7}\right)^{23}}{1-\frac{6}{7}} - 1 = 6 - 7\left(\frac{6}{7}\right)^{23} \approx 5{,}8.$$

b) Mit der Produktregel und der Kettenregel erhalten wir für die Ableitung von f:

$$f'(x) = \cos(x)\ln(x^3 + x + 5) + \sin(x) \cdot \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}.$$

c) Mit der Regel von Sarrus für 3×3-Matrizen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\det(A) &= 5\cdot(-2)\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 5\cdot 2\cdot 4 - (-2)\cdot 1\cdot(-1)\\ &= 10 - 16 + 12 + 24 - 40 - 2\\ &= -12.\end{aligned}$$

Da $\det(A) = -12 \neq 0$, hat das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ genau eine Lösung.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in erweiterter Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems und außerdem den Rang der Koeffizientenmatrix.

Lösung:
Wir lösen das lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \quad \mid \cdot(-2) \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \longleftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. Wir setzen $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$. Aus der zweiten Zeile der letzten Matrix erhalten wir $x_2 = 2$. Setzen wir dies in die erste Zeile ein, erhalten wir die Bedingung $x_1 = -\frac{5}{2} - t$. Als Lösungsmenge notieren wir:

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aus der letzten Matrix lässt sich ablesen, dass die Matrix den Rang 2 hat.

Aufgabe 5 (14 Punkte)
Vorgelegt ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + x - 2}\,.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema.

Lösung:

a) Die Funktion hat genau dann eine Definitionslücke, wenn $x^2 + x - 2 = 0$ gilt. Also

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 = 0 &\implies x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \text{ oder } x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &\iff x = -2 \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

Somit ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

b) Mit der Quotientenregel erhalten wir als erste Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{-x}(x^2 + x - 2) - e^{-x}(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(-x^2 - 3x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}. \end{aligned}$$

Da $e^{-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind die kritischen Punkte genau die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$-x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Die beiden kritischen Punkte sind also

$$x_1 = \frac{-\sqrt{13} - 3}{2} \text{ und } x_2 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}.$$

Entscheidend für das Vorzeichen der ersten Ableitung ist das Vorzeichen der quadratischen Funktion $x \mapsto -x^2 - 3x + 1$. Diese Parabel ist nach unten geöffnet. Daher liegt bei x_1 ein Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$ vor; x_1 ist ein lokales Minimum. Außerdem liegt bei x_2 ein Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$ vor; x_2 ist ein lokales Maximum.

Aufgabe 6 (16 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Regel zur partiellen Integration das Integral

$$\int_0^{32} 2 + \frac{t}{2} \cdot e^{-t/6}\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{3x^2}{(2+x^3)^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung:

a) Mit partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{32} 2 + \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{6}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{32} 2\,\mathrm{d}t + \int_0^{32} \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{6}}\,\mathrm{d}t \\
&= 64 + \left(\frac{t}{2}(-6)e^{-\frac{t}{6}}\right)\Bigg|_0^{32} - \int_0^{32} \frac{1}{2}(-6)e^{-\frac{t}{6}}\,\mathrm{d}t \\
&= 64 - 96e^{-\frac{32}{6}} - \left(18e^{-\frac{t}{6}}\right)\Bigg|_0^{32} \\
&= 64 - 96e^{-\frac{32}{6}} - 18e^{-\frac{32}{6}} + 18 \\
&= 82 - 114e^{-\frac{16}{3}} \approx 81{,}45.
\end{aligned}$$

b) Sei $f(x) = \frac{1}{x^4}$ und $g(x) = 2 + x^3$. Dann gilt $g'(x) = 3x^2$. Mit der Substiutionsregel gilt:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{3x^2}{(2+x^3)^4}\,\mathrm{d}x &= \lim_{L\to\infty} \int_1^{L} \frac{3x^2}{(2+x^3)^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty} \int_{2+1^3}^{2+L^3} \frac{1}{u^4}\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{L\to\infty} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^3}\Bigg|_3^{2+L^3} \right) = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{-1}{3(2+L^3)^3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} \right) = \frac{1}{81}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte)
Spitzensportler nutzen zur Regeneration häufig Eistonnen. Eine solche Tonne wird mit 5 °C kaltem Wasser befüllt und in eine Umgebung gestellt, die konstant 35 °C warm ist. Nach einer halben Stunde hat sich die Temperatur des Wassers auf 11 °C erhöht.
Stellen Sie ausgehend vom Modell des beschränkten Wachstums eine Funktion auf, welche die Temperatur des Wassers nach t Stunden angibt. Nach welcher Zeit wird das Wasser eine Temperatur von 25 °C erreicht haben?

Lösung:
Im Allgemeinen lautet die Zuordnungsvorschrift für Funktionen, welche der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums genügen

$$y(t) = S - c \cdot e^{-kt}, \quad (S, c \in \mathbb{R},\ k > 0).$$

Das Wasser in der Eistonne kann maximal die Temperatur der Umgebung annehmen, d.h. $S = 35$. Es gilt $y(0) = 5$ und somit ergibt sich:

$$y(0) = 5 \iff 35 - c \cdot e^0 = 5 \iff c = 30.$$

Des Weiteren gilt $y(\frac{1}{2}) = 11$. Also können wir den Parameter $k > 0$ wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} y(0{,}5) = 35 - 30 \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{2}} &\iff 11 = 35 - 30 \cdot e^{-\frac{k}{2}} \iff e^{-\frac{k}{2}} = \frac{4}{5} \\ &\iff -\frac{k}{2} = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \iff k = -2\ln\left(\frac{4}{5}\right) = 2\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0{,}4463. \end{aligned}$$

Somit ist

$$y(t) = 35 - 30 \cdot e^{-2\ln\left(\frac{5}{4}\right)t}.$$

Gesucht ist dasjenige $t > 0$, welches $y(t) = 25$ erfüllt.

$$\begin{aligned} y(t) = 25 &\iff 35 - 30 \cdot e^{-2\ln\left(\frac{5}{4}\right)t} = 25 \iff e^{-2\ln\left(\frac{5}{4}\right)t} = \frac{1}{3} \\ &\iff -2\ln\left(\frac{5}{4}\right)t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-2\ln\left(\frac{5}{4}\right)} \approx 2{,}46. \end{aligned}$$

Das Wasser hat also nach etwa 2 h 28 min eine Temperatur von 25 °C.