

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen* Blatt V vom 08.05.14

Aufgabe V.1 (4 Punkte)

Das synthetische Radioisotop ^{251}Es (*Einsteinium*) hat eine Halbwertszeit von 33 h.

- Bestimmen Sie das Zerfallsgesetz $y(t)$, das bei einem Anfangsbestand von y_0 die nach t Stunden vorhandene Menge an ^{251}Es angibt.
- Nach welcher Zeit sind 90 % einer anfänglich vorhandenen Menge an ^{251}Es zerfallen?

Aufgabe V.2 (2+2 Punkte)

Die sog. *Radiokarbonmethode* funktioniert nach dem folgenden Prinzip:

In der Atmosphäre ist das Verhältnis zwischen dem radioaktiven Isotop ^{14}C und dem stabilen Isotop ^{12}C seit Jahrtausenden konstant.¹ Organismen nehmen ^{14}C auf und dadurch stellt sich in diesen Organismen das gleiche Verhältnis zwischen den beiden Isotopen ein wie in der Atmosphäre. Stirbt der Organismus nun ab, dann nimmt er kein weiteres ^{14}C mehr auf, und das bereits im Organismus befindliche zerfällt nach und nach. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich also im Organismus das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C .

Weiterhin ist bekannt, dass ^{14}C eine Halbwertszeit von ca. 5.730 Jahren besitzt.

- Bestimmen Sie die Zerfallsrate beim radioaktiven Zerfall von ^{14}C . (t in Jahren)
- Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen „Ötzi“ gefunden. Proben ergaben, dass das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C in der Mumie noch 53% des Anteils betrug, der in lebendem Gewebe vorhanden ist. In welchem Jahr starb Ötzi?

Aufgabe V.3 (1+2+1 Punkte)

Ein Indianerstamm, bestehend aus 5000 Menschen, lebt isoliert im tropischen Regenwald. Ein Stammesmitglied wird bei der Jagd mit einem hochinfektiösen Grippevirus infiziert. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 3 Wochen bereits 300 Kranke im Stamm.

- Zur Modellierung dieser Grippeausbreitung geht man von logistischem Wachstum der Anzahl an Erkrankten aus. Begründen Sie kurz, warum diese Annahme berechtigt ist.
- Bestimmen Sie das Wachstumsgesetz von $I(t)$, der Anzahl der infizierten Bewohner nach t Wochen. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank?
- Geben Sie die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche in den ersten acht Wochen an.

¹Das radioaktive ^{14}C zerfällt zwar, aber andererseits entsteht durch die Sonneneinstrahlung dauernd neues.

Aufgabe V.4 (5+5 Punkte)

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = m + A \cdot \sin(\omega t + \theta),$$

wobei $m \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Teil 1: Skizzieren Sie jeweils f für folgende Kombinationen der Parameter:

- $m = \theta = 0$, $A = 1$, $\omega = 2$.
- $m = \theta = 0$, $A = 1$, $\omega = \frac{1}{2}$.
- $m = 0$, $A = 1$, $\omega = 2$ und $\theta = \frac{\pi}{4}$.

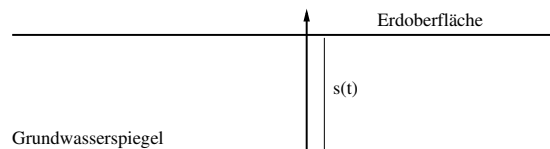
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Funktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ die Periode 2π besitzt, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von ω und θ die Periode von $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$. Dies ist die kleinste Zahl $T \geq 0$ derart, dass $f(t) = f(t + T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- $m = 0$, $\omega = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ und $A = 5$. Ändert sich dabei die Periode im Vergleich zu Teil c?
- $m = -2$, $\omega = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ und $A = 5$. Ändert sich dabei die Periode im Vergleich zu Teil c?

Ordnen Sie jeder der Zahlen A, m, θ, ω sinnvoll einen der Begriffe *Winkelgeschwindigkeit*, *Phasenverschiebung*, *Mittellage* und *Amplitude* zu.

Teil 2: Mit Ebbe und Flut senkt und hebt sich der Grundwasserspiegel im küstennahen Bereich ungefähr gemäß

$$s(t) = m + A \cdot \sin(\omega t + \theta).$$



Die Erdoberfläche wird auf Null normiert, es gilt dann also stets $s(t) \leq 0$. Der Unterschied zwischen Höchst- und Tiefststand sei 38cm, zur Zeit $t = 0$ sei der Tiefststand von -3m gerade erreicht. Eine Ebbe folgt auf die nächste nach etwa 12,42 Stunden. Bestimmen Sie die Funktion s , d.h. bestimmen Sie aus den obigen Angaben und den Erkenntnissen aus Teil 1 alle Parameter A, m, θ und ω , sodass $s(t)$ den zeitlichen Verlauf des Grundwasserspiegels angibt.