

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen* Blatt VII vom 22.05.14

Aufgabe VII.1 (2+2+2+1 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben ist jeweils ein lineares Gleichungssystem in Zeilenstufenform gegeben. Geben Sie entsprechend den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2.1 der Vorlesung die Werte von n , p und r an.

Gibt es genau eine, keine oder unendliche viele Lösungen? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -4 & -1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{c) } \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\text{d) } \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aufgabe VII.2 (4 Punkte)

Alfred Biochef will angesichts des schönen Wetters eine Fahrradtour machen. Jedoch hat er die Zahlenkombination seines Zahlenschlosses vergessen. Er erinnert sich an einige Eigenschaften der Kombination:

Die Kombination ist eine vierstellige natürliche Zahl mit Quersumme 23. Die Summe der ersten beiden Ziffern ist 13. Die zweite Ziffer ist um 1 größer als die letzte Ziffer, und die dritte Ziffer ist die Summe der zweiten und vierten Ziffer.

Helfen Sie Alfred beim Auffinden der Zahlenkombination, indem Sie ein geeignetes Gleichungssystem aufstellen und lösen.

Aufgabe VII.3 (1+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der angegebenen Gleichungssysteme, die als erweiterte Koeffizientenmatrizen $(A|\mathbf{b})$ gegeben sind. Bestimmen Sie auch jeweils $\det(A)$.

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 10 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 5 & -1 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

$$\text{c) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -5 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Aufgabe VII.4 (4 Punkte)

Für welchen Wert des Parameters $r \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned}6x_1 + rx_2 + 4rx_3 &= -6 \\3x_1 + rx_2 + (r^2 + r)x_3 &= -3 + r \\x_1 + rx_2 + r^2x_3 &= r\end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe; ihre Punkte zählen daher nicht zur Summe der erreichbaren Punkte.

Aufgabe VII.5 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine beliebige Matrix.

- a) Gesucht ist zu $\lambda \neq 0$ und $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq k$, eine bestimmte (4×4) -Matrix, die wir hier mit $T_{ik}(\lambda)$ bezeichnen, mit folgender Eigenschaft: Das Matrix-Matrix-Produkt $T_{ik}(\lambda) \cdot A$ ergibt diejenige Matrix, die aus A durch genau eine Zeilenoperation vom Typ I hervorgegangen ist. Bestimmen Sie $T_{ik}(\lambda)$ und zeigen Sie $\det T_{ik}(\lambda) = 1$.
- b) Gesucht ist eine weitere (4×4) -Matrix, bezeichnet mit P_{ik} , $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq k$. Sie soll folgende Eigenschaft haben: Das Produkt $P_{ik} \cdot A$ soll diejenige Matrix ergeben, die aus A durch genau eine Zeilenoperation vom Typ II (Vertauschung von Zeile i mit Zeile k) hervorgegangen ist. Bestimmen Sie P_{ik} und zeigen Sie $\det P_{ik} = -1$.