Dr. Matthieu Felsinger
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2014

Universität Bielefeld

Abgabe bis Freitag, 06.06.14, 12 Uhr im Postfach Ihrer Tutorin/Ihres Tutors (V3-128)

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen*
Blatt VIII vom 28.05.14

Aufgabe VIII.1 (6 Punkte)
Nitroglyzerin ($C_3H_5N_3O_9$) zerfällt bei der Explosion zu Kohlenstoffdioxid (CO_2), Wasser (H_2O), Stickstoff (N_2) und Sauerstoff (O_2). Die Reaktionsgleichung lässt sich z.B. in der Form

$$x_1\ C_3H_5N_3O_9 = x_2\ CO_2 + x_3\ H_2O + x_4\ N_2 + x_5\ O_2$$

schreiben. Hierbei stellen x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 die Anzahl der jeweils benötigten Moleküle dar. Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem für diese Reaktion auf, sodass die Anzahl der jeweiligen Atome (C, H, N, O) auf beiden Seiten übereinstimmen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems und geben Sie anschließend die kleinste positive ganzzahlige Lösung an.

Aufgabe VIII.2 (5 Punkte)
Erstellen Sie zu den unten aufgeführten Folgen jeweils eine Wertetabelle, in der Sie die ersten fünf Folgenglieder auflisten.

a) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

b) $b_n = \frac{n + (-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

c) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_{n+1} = \frac{1}{c_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

d) $d_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{3}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Aufgabe VIII.3 (4 Punkte)
In einem umzäunten Gebiet leben Kaninchenpaare. Sei a_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat. Im ersten Monat sei genau ein frisch geborenes Kaninchenpaar im Gebiet (insbesondere gilt also $a_1 = 1$). Die Natur hat es so eingerichtet, dass jedes dieser Kaninchenpaare unabhängig von der Gebietsgröße und vom Nahrungsangebot jeden Monat ein weiteres Paar zur Welt bringt. Mit der Fortpflanzung beginnt jedes Paar im zweiten Monat nach seiner Geburt. Nehmen Sie weiterhin an, dass kein Kaninchen während der gesamten Zeit stirbt.

a) Bestimmen Sie die ersten zehn Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die die Anzahl der Kaninchenpaare in den Monaten $2, \ldots, 10$ angibt, d.h. geben Sie $a_2, \ldots, a_{10}$ an.

b) Versuchen Sie den Ansatz aus a) auf einen beliebigen Monat $n \in \mathbb{N}$ zu verallgemeinern. Wie ergibt sich a_{n+1} aus a_n und a_{n-1}?

Erreichbare Punktzahl: 20

Aufgabe VIII.4 (5 Punkte)
Sei $t \in \mathbb{R}$. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

b) Bestimmen Sie den Rang von A. Hilft Ihnen hierbei Satz 3.13 aus der Vorlesung?

c) Ist A invertierbar? Falls ja, berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.