

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen* Blatt IX vom 05.06.14

Aufgabe IX.1 (2+3 Punkte)

- a) Gegeben sind zwei lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform. Geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix an und bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungssysteme.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Geben Sie außerdem die Determinante der ersten Koeffizientenmatrix an.

- b) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge der beiden linearen Gleichungssysteme.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 12 & 8 & 12 & 17 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & -1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 10 & -2 & -2 & 5 & -3 \end{array} \right)$$

Geben Sie außerdem die Determinante der ersten Koeffizientenmatrix an. Was fällt Ihnen dabei in Bezug auf Satz 3.13 der Vorlesung auf?

Aufgabe IX.2 (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie $\sum_{j=0}^9 3^j$ und $\sum_{j=1}^{15} \left(\frac{4}{5}\right)^j$.

- b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^j, & \text{(ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (-1) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^j, \\ \text{(iii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j, & \text{(iv)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 19 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^j. \end{array}$$

Aufgabe IX.3 (5 Punkte)

Sei $f : [-10\pi, 10\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \sin(x)$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in [-10\pi, 10\pi]$ derart, dass

$$f'(x) = \sqrt{3}.$$

Aufgabe IX.4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 7x - 8.$

b) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}.$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^3 + 2x) \cdot e^x.$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x \cdot \sin(x).$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\sin(x)}.$

Aufgabe IX.5 (2+2+1 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)^3 + (x - 5)^2 - 7(x + 1) - 5.$

a) Berechnen Sie die Ableitung von f .

b) Bestimmen Sie die Tangentengleichung von f an der Stelle $x = -1$.

c) Diese Tangente¹ schließt im zweiten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

¹Falls Sie die Tangentengleichung in Teil b) nicht bestimmen konnten, dürfen Sie $t(x) = 8x + 12$ als Tangentengleichung verwenden.