Dr. Matthieu Felsinger
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2014

Universität Bielefeld

Abgabe bis Freitag, 20.06.14, 12 Uhr im Postfach Ihrer Tutorin/Ihres Tutors (V3-128)

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen*
Blatt X vom 12.06.14

Aufgabe X.1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen, indem Sie den Satz 4.13 über die Ableitung der Umkehrfunktion verwenden. Skizzieren Sie außerdem die Funktionen arccos und arcsin.

$$\arcsin\colon (-1,1) \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \arccos\colon (-1,1) \to (0,\pi) \quad \text{und} \quad \ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe X.2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich D und untersuchen Sie die Funktion auf globale und lokale Extrema.

a) $f(x) = (x^2 + 4x) \cdot e^{-2x}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2x-5}$

c) $f(x) = \ln\left(e^{-x^2} + 1\right)$

Aufgabe X.3 (1+2+2 Punkte)

a) In Abschnitt 2.6.1 der Vorlesung haben wir das Gesetz des exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls
$$y(t) = y(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}, \qquad (t \in [t_0,\infty), \lambda \in \mathbb{R}),$$
eingeführt. Zeigen Sie, dass dieses Gesetz die Gleichung[1]
$$y'(t) = \lambda \cdot y(t) \tag{1}$$
erfüllt. Interpretation: Bei diesem Wachstumsmodell ist die Änderungsrate $y'(t)$ zum Zeitpunkt $t > t_0$ proportional zum aktuellen Bestand $y(t)$.

b) In Abschnitt 2.6.2 der Vorlesung haben wir das Gesetz des beschränkten Wachstums bzw. Zerfalls
$$y(t) = S - c \cdot e^{-kt}, \qquad (S, c \in \mathbb{R}, k, t \geq 0),$$
eingeführt. Zeigen Sie, dass dieses Gesetz die Gleichung
$$y'(t) = k(S - y(t)) \tag{2}$$
erfüllt. Geben Sie eine Interpretation dieser Gleichung.

[1] Eine solche Gleichung, die eine Funktion in Beziehung zu ihrer Ableitung setzt, nennt man *Differentialgleichung*.

Erreichbare Punktzahl: 20

c) In Abschnitt 2.6.3 der Vorlesung haben wir das Gesetz des logistischen Wachstums

$$y(t) = \frac{y(0) \cdot S}{y(0) + (S - y(0)) \exp(-Skt)}, \qquad (S, k, t \geq 0),$$

eingeführt. Zeigen Sie, dass dieses Gesetz die Gleichung

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (S - y(t)) \tag{3}$$

erfüllt. Geben Sie eine Interpretation dieser Gleichung.

Aufgabe X.4 (4 Punkte)
Der Ertrag y einer Pflanzensorte bei Düngereinsatz x folgt näherungsweise dem Gesetz von Mitscherlich[2]

$$y(x) = y_0(1 - e^{-kx}),$$

wobei $y_0 > 0$ und $k > 0$ sorten- und bodenabhängige Konstanten sind. Wenn c_1 und c_2 die Preise von der Sorte bzw. dem Dünger bezeichnen, beträgt der Nettogewinn g nach Düngereinsatz x

$$g(x) = c_1 y(x) - c_2 x.$$

a) Welcher Düngereinsatz x^* erzielt den maximalen Gewinn?

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, welcher den Gewinn in Abhängigkeit des Düngereinsatzes darstellt.

[2] E. A. Mitscherlich, 1874-1956, Pflanzen- und Bodenkundler.