

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen* Blatt XI vom 18.06.14

Aufgabe XI.1 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x)e^x.$$

- Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Maxima und Minima.
- Zeigen Sie, dass f eine Tangente t besitzt, welche die Steigung e besitzt und die y -Achse bei $-e$ schneidet. Bestimmen Sie den Berührungspunkt.

Aufgabe XI.2 (6 Punkte)

Für $k > 0$ ist die Funktionenschar

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = -x^3 + kx^2$$

gegeben.

- Berechnen Sie in Abhängigkeit von $k > 0$ die Schnittpunkte von f_k mit den Koordinatenachsen.
- Untersuchen Sie f_k auf lokale Maxima und Minima.
- Bestimmen Sie diejenigen Werte von k , sodass die Änderungsrate von f_k an der Stelle $x_0 = k$ kleiner als -4 ist.

Aufgabe XI.3 (2+3 Punkte)

Die Konzentration eines bestimmten Medikaments im Blut eines Patienten wird in den ersten sechs Stunden durch die Funktion $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ beschrieben. Dabei wird t in Stunden nach der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen. Nach diesen sechs Stunden ist die Abbaurate konstant derart, dass nach weiteren vier Stunden das Medikament vollständig abgebaut ist.

- Bestimmen Sie die Abbaurate für $t \in [6, 10]$.
- Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Konzentration des Medikaments im Blut maximal ist. Geben Sie diese maximale Konzentration an.

Aufgabe XI.4 (5 Punkte)

Zur Fußball-WM 2014 herrscht in Rio de Janeiro ein sehr hohes Verkehrsaufkommen. Die zuständige Behörde möchte daher auf einem langen, stark befahrenen Streckenabschnitt ein Geschwindigkeitslimit einführen, das dafür sorgt, dass pro Stunde möglichst viele Fahrzeuge den Streckenabschnitt passieren können.

Nach einigen Stichproben erscheinen folgende Modellannahmen gerechtfertigt: Jedes Fahrzeug ist 3,5 m lang, fährt im Abschnitt eine konstante Geschwindigkeit von $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und hält zum Vorausfahrenden (Abstand vordere Stoßstange - hintere Stoßstange) exakt einen Sicherheitsabstand von S Metern ein.

Dieser Sicherheitsabstand ist die Summe aus Reaktionsweg und Bremsweg, wobei der Reaktionsweg die Strecke ist, die ein Fahrzeug in einer Sekunde ("Schrecksekunde") zurücklegt, und der Bremsweg b in guter Näherung durch¹

$$b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

berechnet werden kann.

Berechnen Sie ausgehend von diesen Annahmen das Geschwindigkeitslimit, welches die Anzahl an Fahrzeugen maximiert, die den Streckenabschnitt pro Stunde passieren können. Wie ändert sich diese optimale Geschwindigkeit und die maximale Fahrzeugzahl, wenn sich die Fahrzeuglänge vergrößert?

¹In diese Formel ist v ohne Einheiten einzusetzen und das Ergebnis b wird in Metern angegeben.