

Übungsaufgaben zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen*
Blatt XIII vom 03.07.14

Aufgabe XIII.1 (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int_0^1 4x e^{2x+1} dx$

c) $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} (e^{2x} + e^x) \cdot \ln(1 + e^x) dx$

(Hinweis: Wählen Sie $g(x) = 1 + e^x$ in der Substitutionsregel und integrieren Sie anschließend partiell.)

Aufgabe XIII.2 (4 Punkte)

Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Der Verlauf der Dosierung¹ werde durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = 1 + b \cdot t \cdot e^{kt}.$$

Hierbei bezeichnet $t \in [0, 24]$ die Zeit in Stunden. Begonnen wird also mit einer Dosierung von 1 mg/h.

- a) Berechnen Sie die Werte von b und k , für welche die maximale Dosierung von 5 mg/h bei $t = 4$ Stunden erreicht wird. Skizzieren Sie den Graphen von f .
(Kontrollergebnis: $b = e$ und $k = -\frac{1}{4}$.)
- b) Unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Teil a: Berechnen Sie die insgesamt verabreichte Menge des Medikamentes, wenn die Infusion 24 Stunden angelegt ist.

Aufgabe XIII.3 (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale mit Hilfe der Substitutionregel.

a) $\int_1^{\infty} \frac{\exp\left(-t^{\frac{1}{20}}\right)}{t^{\frac{19}{20}}} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{3x+x^3}} dx$

¹Dosierung bedeutet hierbei Zufuhr des Medikamentes pro Zeit in mg/h.

Aufgabe XIII.4 (1+2+3 Punkte)

Die sog. *Exponentialverteilung* zum Parameter $\lambda > 0$ besitzt die Dichtefunktion $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

- a) Weisen Sie nach, dass p für jedes $\lambda > 0$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
- b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (5.3) aus der Vorlesung, dass für den Erwartungswert \bar{L} einer exponentialverteilten Größe L die Identität $\bar{L} = \frac{1}{\lambda}$ gilt.
- c) Wir unterstellen, dass die Überlebenszeit L einer Population von Mückenlarven in einem ausgetrockneten Flussbett exponentialverteilt ist. Aufgrund der Trockenheit hat die Population eine erwartete Überlebenszeit von 5 Tagen.

Bestimmen Sie aus diesen Angaben den Parameter $\lambda > 0$, der in diesem Kontext als Sterberate interpretiert werden kann.

Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Überlebenszeit einer beliebig ausgewählten Mückenlarve

- zwischen 4 und 7 Tagen
- mehr als 5 Tage

beträgt.