

Übung Algebraische Geometrie II – Blatt 1

S Aufgabe 1. Zeige: Ein Ideal $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ist homogen genau dann, wenn für alle $f \in I$ gilt: alle homogenen Summanden von f liegen ebenfalls in I .

Aufgabe 2. Zeige: Die Bijektion zwischen abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{P}^n(k)$ und homogenen Radikalidealen in $k[x_0, \dots, x_n]$ induziert eine Bijektion $\{\text{irreduzible abg. } V \subset \mathbb{P}^n(k)\} \rightarrow \{\text{homogene Primideale } \mathfrak{p} \subset k[x_0, \dots, x_n]\}$. Warum muss auch (x_0, \dots, x_n) auf der rechten Seite zugelassen werden?

S Aufgabe 3. Sei $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal.

(a) Zeige: Der Quotient $k[x_0, \dots, x_n]/I$ hat eine natürliche Graduierung, d.h. eine Zerlegung als direkte Summe

$$k[x_0, \dots, x_n]/I = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A^{(m)}$$

derart, dass $A^{(m)}A^{(n)} \subset A^{(m+n)}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeige: Auch für die Lokalisierung $k[x_0, x_0^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ und das darin von I erzeugte Ideal gilt eine analoge Aussage.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Finde $n+1$ affine Schemata $X_i \subset \mathbb{A}_k^n$, welche sich zu einem abgeschlossenen Unterschema $X \subset \mathbb{P}_k^n$ verkleben derart, dass die Menge $X(k)$ aller Punkte von X mit Restklassenkörper k gleich $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ ist.

(Hinweis: Imitiere dazu die Konstruktion von \mathbb{P}_R^n aus Abschnitt 1. Verwende Aufgabe 3.)

S Aufgabe 5. (a) Sei X ein Schema. Zeige, dass $\mathbb{A}_X^n \rightarrow X$ und $\mathbb{P}_X^n \rightarrow X$ von endlichem Typ sind.

(b) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeige: Falls f endlich ist, dann ist f auch von endlichem Typ, aber nicht umgekehrt.

(c) Finde einen Morphismus $f : X \rightarrow \text{Spec } k$, der nicht von endlichem Typ ist.