

Sinuskurven überall

Zur Mathematik der Panorama-Fotografie

von

Barbara Ringel und Claus-Michael Ringel, Bielefeld

Kurzfassung: Panorama-Fotos, das sind oft 360° -Bilder, weisen extreme Verzerrungen auf, die den Betrachter irritieren. Statt der erwarteten geraden Linien wird er mit einer Vielzahl von Bögen konfrontiert. Im Beitrag wird gezeigt, dass für Panoramabilder das Auftreten von Sinuskurven mit gleicher Frequenz, aber mit beliebiger Amplitude und beliebigen Phasenverschiebungen charakteristisch ist. Es wird herausgearbeitet, dass derartige Sinuskurven ganz essentiell zum Sehen gehören, dass sie allerdings durch die übliche Fixierung auf den starren Blick, der durch die Zentralperspektive beschrieben wird, ausgeblendet werden. Mit etwas Übung bemerkt man die Allgegenwart dieser Sinusbögen. Wir beschäftigen uns hier mit den (nicht nur mathematischen) Hintergründen der Panorama-Fotografie.

Abstract: Panorama fotos (often providing 360° -pictures) yield extremal distortions which irritate the viewer. Instead of the expected straight lines one is confronted with a multitude of curved bows. In the article we show that these are partial sine curves. Such sine curves (with identical frequency, but arbitrary amplitude and arbitrary phase shift) are essential for our visual perception: The usual obsession with the stiff view described by the central perspective hides this phenomenon. With a little training one realizes the ubiquity of such sine curves. Altogether we are going to describe part of the mathematical (and non-mathematical) background of panorama fotografy.

1 Der Landschaftspark Riem im Rundblick: Analyse

In der letzten Zeit werden in Zeitungen und im Internet immer häufiger Panorama-Fotografien veröffentlicht. Solche Bilder entstehen, indem die Kamera einen vollen Schwenk um 360° durchführt. Genau genommen werden dabei viele kleine senkrechte Streifen aneinander gesetzt, bis der Kreis geschlossen ist. Das Gesamtbild kann man sich als einen abgerollten Zylinder vorstellen. In der Süddeutschen Zeitung fand sich das folgende Panorama-Bild (Abb. 1) vom Landschaftspark Riem in München. Es schreit geradezu danach, die hier sichtbaren Kurven zu untersuchen. Sie erinnern an Parabeln, oder sind es doch eher Teile von Hyperbeln, oder ...? Will man dies untersuchen und die zugehörigen Funktionsterme entwickeln, muss man sich zunächst Gedanken machen über die Projektionen, die hier eine Rolle spielen.



Abbildung 1

1.1 Zentralprojektion auf einen Zylinder

Wie wird ein Punkt P (etwa ein Vogel) bei einer solchen Fotografie auf dem Panorama-Bild (dem abgerollten Zylinder) dargestellt? Zur Untersuchung dieser Frage werden lediglich der 2. Strahlensatz und die Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck benötigt, dies allerdings im \mathbb{R}^3 .

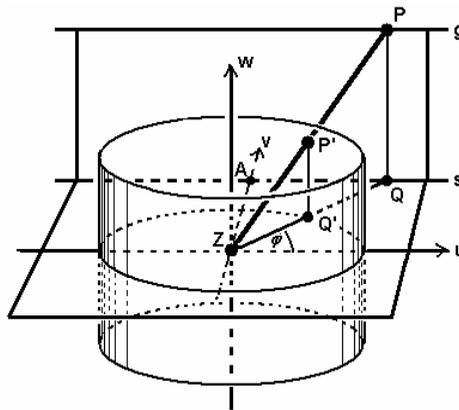


Abbildung 2

Wir verwenden hier für den \mathbb{R}^3 ein uvw -Koordinatensystem, um im Panorama-Bild mit einem xy -Koordinatensystem arbeiten zu können. Projektionszentrum ist der Ursprung, den wir mit Z bezeichnen, projiziert wird auf den Zylinder über dem Einheitskreis. Die uv -Ebene ist also die (waagrechte) Ebene in Augenhöhe, sie entspricht auf dem projizierten Bild der Horizontlinie (Abb. 2).

Unser Punkt P (der Vogel) liefert als Bildpunkt den Punkt P' auf dem Zylinder. Als erstes wollen wir die Höhe y von P' über der uv -Ebene bestimmen. Bezeichnen wir mit Q den Fußpunkt der Projektion von P auf die uv -Ebene, so erhalten wir die Strahlensatzfigur QZP (Abb. 3a).

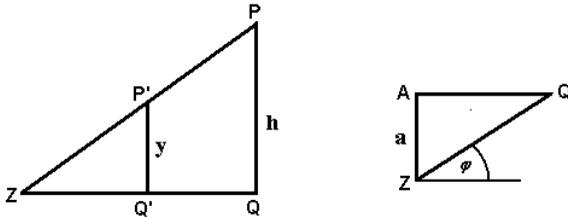


Abbildung 3a und 3b

Die Länge einer Strecke \overline{ZQ} wird im Folgenden mit $|\overline{ZQ}|$ bezeichnet, usw.

Da Q' auf dem Einheitskreis um Z liegt, ist $|\overline{ZQ'}| = 1$. Wir setzen $|\overline{P'Q'}| = y$ und $|\overline{PQ}| = h$. Der zweite Strahlensatz liefert

$$\frac{|\overline{P'Q'}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{ZQ'}|}{|\overline{ZQ}|},$$

also

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{|\overline{ZQ}|},$$

und demnach gilt

$$y = \frac{h}{|\overline{ZQ}|}.$$

Kennen wir also die Höhe h des Punktes P und den horizontalen Abstand $|\overline{ZQ}|$, so kennen wir auch die Bildhöhe y .

Sei s die Parallele zur u -Achse durch den Punkt Q , ferner sei a der Abstand von s zum Ursprung Z (in den Abb. 2 und 3b ist dies gerade die Länge der Strecke \overline{ZA}). Wir betrachten nun das Dreieck ZQA . Den Winkel zwischen der u -Achse und der Strecke \overline{ZQ} bezeichnen wir mit φ . Das Dreieck ZQA zeigt, dass

$$|\overline{ZQ}| = \frac{a}{\sin \varphi}$$

gilt. Daher ist

$$y = \frac{h}{|\overline{ZQ}|} = \frac{h}{a} \cdot \sin \varphi.$$

Das gesuchte Panorama-Bild entsteht, wenn man den Zylinder abrollt: Man erhält dadurch als xy -Koordinaten des Punktes P' die folgenden beiden Werte: $x = -\varphi$ (das Minus-Zeichen erhalten wir, da der Drehwinkel φ zwischen der u -Achse und der Strecke $\overline{ZQ'}$ entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn angesetzt wird, im xy -Koordinatensystem des abgerollten Zylinders aber rechtsorientiert gelesen wird), und y ist wie bisher der Abstand des Punktes P' von der uv -Ebene, da wir die Horizontlinie auf die x -Achse legen.

Nehmen wir nun zusätzlich an, dass P auf einer Geraden g liegt, die parallel zur u -Achse verläuft (dann ist s die Vertikalprojektion der Geraden g in die uv -Ebene), so ist klar, dass der Quotient h/a konstant ist: Das Bild der Geraden g auf dem abgerollten Zylinder ist also eine Sinuskurve. Wirklich? Nun, wir erhalten nur die Hälfte einer Sinus-Schwingung, nämlich den Bogen mit $0 < \varphi < \pi$.

Unabhängig von diesen Überlegungen sieht man: Je weiter der Punkt P auf der Geraden g nach außen wandert, umso geringer ist die Höhe y , der Punkt P' liegt dann fast auf dem Einheitskreis. Das entspricht der Erfahrung, dass weit entfernte Objekte (fast) auf der Horizontlinie liegen.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass die Gerade g zur u -Achse parallel ist. Im Allgemeinen werden wir für eine beliebige horizontale Gerade einen entsprechenden Bogen erhalten, der allerdings entlang der x -Achse verschoben ist.

1.2 Die Sinusbögen im Panoramabild des Landschaftsparks Riem

Kehren wir zurück zum Panorama-Bild vom Landschaftspark Riem (Abb. 1). In der rechten Bildhälfte sehen wir eine geradlinige Straße: Unser Punkt P (hier nun ein Punkt der Straßenkante) liefert beim Schwenk der Kamera einen Bildpunkt P' , der sich sinusförmig bewegt; wir erhalten auf dem Bild eine halbe Sinusschwingung – die Straße rückt irgendwann ins Blickfeld und verschwindet nach einer Drehung von 180° wieder aus dem Blickfeld.

Wir beginnen nun umgekehrt mit dem Panorama-Bild und stellen uns die Aufgabe, einen derartigen Sinusbogen effektiv zu beschreiben. Es bietet sich hier an, einen der beiden Fluchtpunkte F_1 (an dem die Straße in der Horizontlinie endet) als Ursprung zu wählen und dann den 2. Fluchtpunkt (die 2. Nullstelle) F_2 durch Ablesen anzupeilen, damit haben wir die Periodenlänge. Neben der Periodenlänge ist als zweiter Parameter die Amplitude, also der Quotient h/a , zu bestimmen: Auch hier ist man auf Augenmaß und Probieren angewiesen (manchmal werden die Maße von a und h aber auch bekannt sein).

Zusätzlich halten wir Folgendes fest: Alle Parallelen zu unserer Straßenkante erreichen die Horizontlinie in denselben beiden Punkten. Wir erhalten also eine ganze Schar von Sinusbögen durch unsere Fluchtpunkte, die parallele Geraden der Realität (Straßenränder, Baumreihen, Schattenränder der Bäume, Baumwipfel) auf dem Foto wiedergibt.

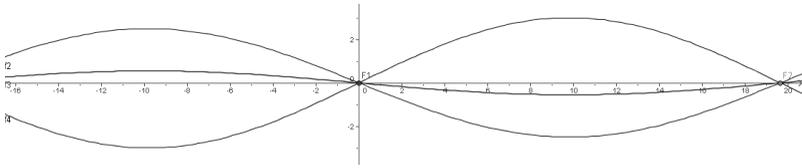


Abbildung 4a

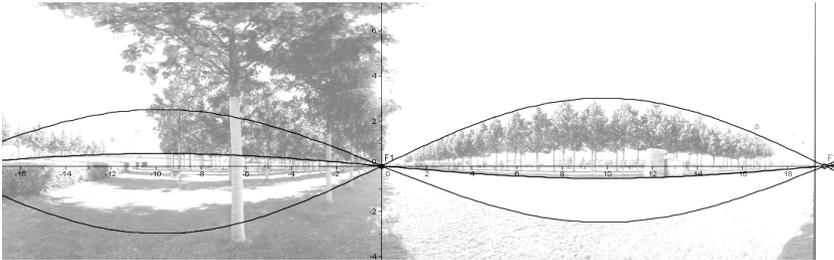


Abbildung 4b

Wir haben oben notiert, dass die x -Achse des Panorama-Bilds den Rechtsschwenk der Kamera beschreibt, im Gegensatz zur mathematischen Konvention eines Drehwinkels, der einem Linksschwenk entsprechen würde, dass also $x = -\varphi$ gesetzt wird. Die Funktionsgleichungen, die sich hier beim Experimentieren ergaben, sind:

- vordere Straßenkante: $f_1(x) = -2,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{19,63} \cdot x\right)$
- hintere Straßenkante: $f_2(x) = -0,55 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{19,63} \cdot x\right)$
- Baumoberkante: $f_3(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{19,63} \cdot x\right)$

Dabei haben wir den zweiten Fluchtpunkt auf den Punkt $F_2(19,63|0)$ nach Augenmaß gesetzt. Die Bilder wurden mit dem Programm *GeoGebra* (Version 2.6b) erzeugt; die Skalierung der Achsen ist linear im Verhältnis 1:1. Gezeichnet sind hier zur Verdeutlichung jeweils volle Sinuskurven, auch wenn nur die rechten Bögen zur Modellierung gebraucht werden.

Ganz allgemein gilt: Gerade Linien unterhalb der Augenhöhe ergeben einen unteren (also konkaven) Sinusbogen, Linien oberhalb entsprechend einen oberen (also konvexen).

Noch einige Hinweise zum Panorama-Bild von Riem (Abb. 1):

- Die Seilbahn, die am rechten Bildrand recht deutlich zu erkennen ist, verläuft offensichtlich nicht parallel zur Straße, der Fluchtpunkt ist hier ein anderer. Eine Sinuskurve, die ihren Verlauf nachzeichnet, gehört deshalb nicht zur betrachteten Schar. (Außerdem ist bei der Seilbahn zu berücksichtigen, dass die Seile sicher keine Geraden bilden, sondern durchhängen.)
- Das Bild musste für die Kurvenanpassung leicht gedreht werden – offensichtlich war die Drehachse der Kamera bei der Aufnahme nicht absolut senkrecht ausgerichtet.
- Das Bild zeigt kein vollständiges Panorama von 360° , wie man an den beiden Fluchtpunkten, die rechts und links außerhalb des Bildes liegen, erkennen kann. Es fehlen etwa 12° . Das Hintergrundbild bei den Kurvenanpassungen mit *GeoGebra* wurde links allerdings noch weiter beschnitten (Abb. 4b).
- Das Bild zeigt übrigens gar kein Zylinder-Panorama, sondern einen Ausschnitt aus einem Kugel-Panorama, wie wir vom Fotografen erfuhren. Das Projektionsverhalten bei derartigen Kugelpanoramen ist in der Nähe des Horizonts ganz ähnlich zu dem einer Zylinderprojektion. Es ändert sich aber mit wachsendem vertikalen Abstand vom Horizont (wie man dies von Landkarten her kennt – auf die Mercator-Projektion werden wir weiter unten noch eingehen).

1.3 Ebene Schnitte eines Zylinders

Das Problem, mit dem wir uns beschäftigen, lässt sich auch anders beschreiben: Wir betrachten das Schnittverhalten eines Zylinders mit einer Ebene E . Die Ebene, von der hier die Rede ist, ist die Ursprungs-Ebene durch die Gerade g , auf ihr liegen die Sichtstrahlen zu den Punkten P der Geraden. Nun weiß man aber, dass eine derartige Ebene den Zylinder im Allgemeinen in einer Ellipse schneidet (Abb. 5a). Man kann sich die entstehenden Sinuskurven leicht ansehen, wenn man den Pappkern einer Toilettenpapier-Rolle schräg zersägt, den Mantel aufschneidet und die Säge-Kante betrachtet (Abb. 5b). Eine Wurstpelle, gekonnt abgezogen, tut's auch.

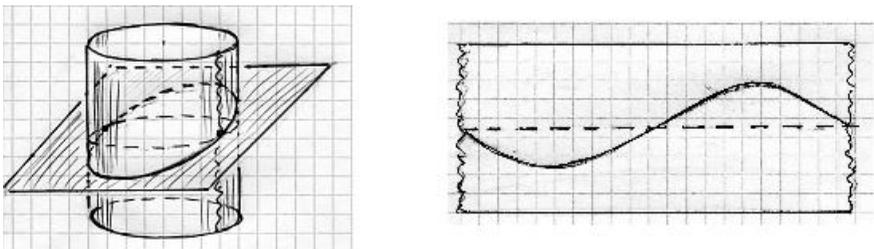


Abbildung 5a und 5b



Abbildung 6

Betont werden sollte, dass die so entstandenen Ellipsen den uv -Einheitskreis in diametral gegenüberliegenden Punkten schneiden, dass wir also im Panorama-Bild immer Sinusfunktionen erhalten, deren Wendepunkte im Abstand π auf der x -Achse liegen (falls wir mit einem Zylinder mit Radius 1 arbeiten): Da die Ebene E durch den Ursprung geht, schneidet sie die uv -Ebene in einer Ursprungsgeraden, eine Ursprungsgerade schneidet aber den Einheitskreis in diametral entgegengesetzten Punkten. Es gibt einen Ausnahme-Fall: Steht die Ebene senkrecht auf der uv -Ebene, so erhält man als Schnitt mit dem Zylinder zwei gegenüberliegende Mantellinien.

1.4 Zusammenfassung: Die Sinusbögen der Panoramabilder

Wir fassen zusammen: Ausgangspunkt ist wieder das uvw -Koordinatensystem mit dem Zylinder über dem Einheitskreis der uv -Ebene, projiziert werde vom Ursprung Z aus auf diesen Zylinder (Z ist also das wahrnehmende Auge). Das Abrollen des Zylinders liefert unser Panorama-Bild mit einem xy -Koordinatensystem, die x -Achse ist dabei die Horizontlinie (also die Augenhöhe). Ist nun g eine Gerade im Raum, die parallel zur uv -Ebene verläuft und die die w -Achse nicht schneidet, so liefert g unter unserer Projektion einen Sinusbogen. Die Sinusfunktionen, die man auf diese Weise erhält, haben alle die gleiche *Frequenz*, nämlich $1/(2\pi)$; dagegen sind Amplitude und Phase beliebig: Die Funktionen haben die Form

$$f(x) = \lambda \cdot \sin(x - x_0)$$

(mit Amplitude λ und Phasenverschiebung x_0). Die Gerade g liefert nur einen Ausschnitt des Graphen der Sinusfunktion, vom Wendepunkt x_0 zum nächsten Wendepunkt $x_0 + \pi$, eben einen *Sinusbogen*¹; dabei sind die Endpunkte des Sinusbogens die Fluchpunkte der Geraden (also die gedachten Schnittpunkte der Geraden g mit der Horizontlinie). Ein Spezialfall ist zu erwähnen: Liegt die Gerade g in

¹ Auf den ersten Blick mag es überraschend erscheinen, dass man hier in natürlicher Weise lediglich halbe Sinus-Schwingungen auftreten. Günter Graumann wies uns darauf hin, dass es auch in der Musik die halben Sinus-Schwingungen sind, die eine grundsätzliche Rolle spielen.

Augenhöhe (also in der uv -Ebene), so ist $\lambda = 0$, der Sinusbogenartet zu einer Strecke der Länge π auf der x -Achse aus. Ansonsten wird man unterscheiden, ob die *Amplitude* λ positiv oder negativ ist. Ist λ positiv (der Sinusbogen also konvex), so handelt es sich um eine Gerade oberhalb der Augenhöhe; negatives λ (konkaver Sinusbogen) steht für Geraden unterhalb der Augenhöhe. Der Betrag von λ verweist darauf, wie stark man den Kopf heben oder senken muss, um die Gerade g zu sehen. Insgesamt erkennt man, dass parallele Geraden g zu Sinusfunktionen führen, die sich höchstens in der Amplitude unterscheiden: Sie haben ja die gleichen Fluchtpunkte. Eine Änderung der Geradenrichtung führt zu einer *Phasenverschiebung*: Verschieben werden dabei die Fluchtpunkte, insbesondere ändert sich also x_0 .

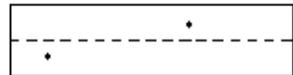
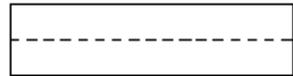
2 Geraden im Raum: eine Systematisierung der Möglichkeiten

2.1 Zentralprojektion von Geraden auf den Zylinder

Wir wollen nun überblicksartig angeben, welche Möglichkeiten es gibt, eine beliebige Gerade g des \mathbb{R}^3 auf den Zylinder zu projizieren; der Zylinder habe den Radius 1. Acht Fälle sind zu unterscheiden.

Zuerst notieren wir, was passiert, wenn g eine Ursprungsgerade ist:

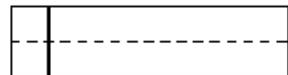
1. Ist g die w -Achse, so erhält man keinen einzigen Projektionspunkt.
2. Ist g eine Ursprungsgerade, aber nicht die w -Achse, so erhält man zwei Punkte.



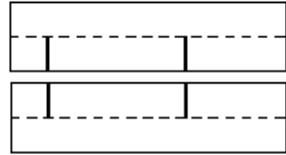
Es sei betont, dass sich die x -Koordinaten der beiden Punkte um π unterscheiden und dass die y -Koordinate des einen Punktes das Negative der y -Koordinate des anderen Punktes ist. Derartige Punktepaare spielen eine wichtige Rolle, wir nennen solche Punkte ein *entgegengesetztes Punktepaar*.

Nun wenden wir uns den Geraden zu, die nicht durch den Ursprung gehen: Von besonderem Interesse sind für uns horizontale und vertikale Geraden, also Geraden, die parallel zur w -Achse oder parallel zur uv -Ebene sind. Wir bezeichnen mit E die (eindeutig bestimmte) Ursprungsebene, die g enthält. Dabei skizzieren wir jeweils rechts im Panorama-Bild das Bild einer typischen derartigen Geraden g unter der Zentralprojektion (gestrichelt ist die x -Achse eingezeichnet, dies ist gerade die Horizontlinie).

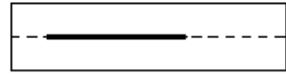
3. Ist g parallel zur w -Achse, aber verschieden von ihr, so erhält man eine Mantellinie des Zylinders, also eine senkrechte Gerade im Panorama-Bild.



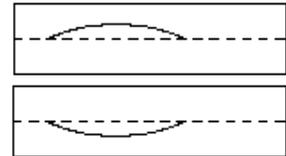
4. Schneidet g die w -Achse in einem Punkt, aber nicht im Ursprung, und ist sie parallel zur uv -Ebene, so erhält man zwei gegenüberliegende halbe Mantellinien (dabei ist zu unterscheiden, ob g oberhalb oder unterhalb der uv -Ebene liegt).



5. Ist g eine Gerade in der uv -Ebene, die nicht durch den Ursprung geht, so ist der Schnitt von E mit dem Zylinder ein Kreis; im Panorama-Bild ist dieser Schnitt die Horizontlinie. Als Projektionspunkte der Geraden g erhält man auf dem Zylinder einen Halbkreis, also im Panorama-Bild eine Strecke der Länge π auf der x -Achse.



6. Ist die Gerade g parallel zur uv -Ebene und schneidet sie nicht die w -Achse, so schneidet E den Zylinder in einer echten Ellipse, im Panorama-Bild ist dieser Schnitt eine Sinuskurve. Als Projektionspunkte der Geraden g erhält man auf dem Zylinder eine halbe Ellipse, mit Randpunkten auf dem Einheitskreis. Im Panorama-Bild liefert g einen Sinusbogen. (Auch hier gibt es wieder zwei verschiedene Möglichkeiten, je nach dem, ob g oberhalb oder unterhalb der uv -Ebene liegt.)

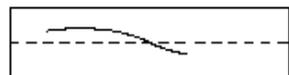


Schließlich notieren wir, was mit einer Geraden g passiert, die weder parallel zur w -Achse noch parallel zur uv -Ebene ist:

7. Schneidet g die w -Achse in einem Punkt, aber nicht im Ursprung, und ist sie nicht parallel zur uv -Ebene, so erhält man zwei gegenüberliegende partielle Mantellinien, die sich beide von oben oder beide von unten einem entgegengesetzten Punktepaar nähern (dabei ist zu unterscheiden, ob der Schnittpunkt von g mit der w -Achse oberhalb oder unterhalb der uv -Ebene liegt).



8. Ist die Gerade g nicht parallel zur uv -Ebene und schneidet sie nicht die w -Achse, so schneidet E den Zylinder ebenfalls in einer echten Ellipse; im Panorama-Bild ist dieser Schnitt eine Sinuskurve. Als Projektionspunkte der Geraden g erhält man auf dem Zylinder eine halbe Ellipse. Die Rand-



punkte liegen nicht mehr auf dem Einheitskreis. Im Panorama-Bild liefert g einen Ausschnitt der Sinuskurve über einem Intervall der Länge π . Die Randpunkte sind ein entgegengesetztes Punktepaar.

2.2 Die Geraden und ihre Fluchtpunkte

Die wichtigsten Fälle, die man immer vor Augen haben sollte, sind die horizontalen und vertikalen Geraden², also vor allem die Fälle 6 und 3. Viele Beispiele dazu sind sofort im Bild des Landschaftsparks Riem sichtbar. Wir werden in Teil 3 noch einmal auf die horizontalen Geraden eingehen und die Bedeutung der jeweiligen Fluchtpunkte herausarbeiten: Alle diese Fluchtpunkte liegen auf der Horizontlinie, und zwar liegen die beiden Fluchtpunkte³ im Abstand π voneinander. Und umgekehrt können natürlich alle Punkte der Horizontlinie als Fluchtpunkte möglicher horizontaler Geraden auftreten.

Die Fälle 1 und 2 sind aus einleuchtenden Gründen kaum durch Fotos präsentierbar. Der Fall 5 ist leicht vorstellbar; ein Beispiel findet sich am Ende der Arbeit (Abb. 43a und 43b).

Ein Beispiel für den Fall 4 zeigt die Abbildung 7. Der Fotograf steht mitten auf einer geradlinig verlaufenden Straße und sieht zu Beginn den Straßenverlauf in einer Richtung bis zum Horizont. Das andere Ende der Straße liegt hinter ihm und wird erst sichtbar, wenn er sich um 180° gedreht hat. Bei den beiden im Bild sichtbaren Straßenabschnitten handelt es sich also um dieselbe Straße, aber um entgegengesetzte Blickrichtungen. Es fehlt aber ein kleiner Straßenabschnitt, nämlich der Bereich, auf dem der Fotograf steht und der daher nicht im Bild erfasst wird. Rollt man das Bild zum Zylinder, so ist dies unmittelbar einsichtig.

² Horizontale und vertikale Geraden sind es, an denen man sich im täglichen Leben vor allem orientiert. Verwiesen sei schon hier auf ein Zitat von Bollnow (2004) am Ende der Arbeit.

³ Leser, die mit der reellen projektiven Ebene vertraut sind, werden hier sofort Vergleiche ziehen wollen: Betrachten wir z. B. die zur uv -Ebene parallele Ebene E mit $w = -1$. Unter unserer Projektion erhalten wir als Bildpunkte alle Punkte mit $y < 0$. Dabei hat allerdings der Ursprung von E keinen Bildpunkt – unsere Projektionsabbildung ist nur auf der gelochten Ebene definiert. Die Hinzunahme der Horizontlinie entspricht einer partiellen Kompaktifizierung, ganz ähnlich zur Hinzunahme der „uneigentlichen“ Geraden in der projektiven Geometrie. Während aber die Punkte dieser „uneigentlichen“ (oder „unendlich fernen“) Geraden den Geradenrichtungen in der Ebene E entsprechen, liefert die Zentralprojektion auf den Zylinder für jede Geradenrichtung in E zwei Fluchtpunkte nicht nur einen. Die Horizontlinie kann als eine zweifache Überlagerung der „uneigentlichen“ Geraden interpretiert werden.



Abbildung 7

Für die Fälle 7 und 8 haben wir einen Aufgang zur Universität Bielefeld fotografiert. Abbildung 8 zeigt ihn in Zentralperspektive⁴.



Abbildung 8

Für den Fall 7 sieht man in Abbildung 9 eine Zusammensetzung von Einzelbildern der schrägen Rampe. Die Pfeile markieren das schräge Gelände (die Gerade g), darüber steht die Kamera (der Ursprung). Die Horizontlinie ist eingezeichnet, links endet die Gerade g über der Horizontlinie, rechts unter ihr.



Abbildung 9

⁴ Der Knick am hinteren Ende des Aufgangs liefert leider den Eindruck einer (scheinbaren) Krümmung, dies bleibt aber bei den folgenden Abbildungen ohne Bedeutung, da in Abbildung 9 dieser Teil von der Kamera nicht erfasst wird und da wir in Abbildung 10 das Bild vorher enden lassen.

Abbildung 10 dokumentiert den Fall 8 (hier sind etwas weniger als 180° dargestellt).



Abbildung 10

Insgesamt können wir festhalten, dass fast alle Geraden im Raum Abschnitte von Sinuskurven liefern, und zwar Abschnitte über einem Intervall der Länge π (Ausnahmen bilden nur die Geraden in der uv -Ebene, die dazu senkrechten Geraden, und die Geraden, die die w -Achse schneiden).

Unsere ersten Überlegungen beschränkten sich auf solche Geraden, die parallel zur uv -Ebene sind: Sie liefern Sinusbögen von Wendepunkt zu Wendepunkt. Andere Geraden liefern ebenfalls Ausschnitte von Sinuskurven, hier liegen die Fluchtpunkte aber nicht auf der Horizontlinie. Wie bestimmt man diese Fluchtpunkte? Zur Geraden g gibt es eine parallele Ursprungsgerade g' . Da g nicht vertikal ist, ist auch g' nicht vertikal. Die Ursprungsgerade g' schneidet den Zylinder in zwei entgegengesetzten Punkten (in der Liste ist dies der Fall 2), diese liefern die Fluchtpunkte der Geraden g .

2.3 Das Justieren der Kamera

Auch Folgendes ist von Interesse: Ist die Kamera nicht genau justiert, ist also die Zylinder-Achse nicht genau in Richtung des Erdmittelpunktes ausgerichtet, so erhält man als Horizont eine Sinuskurve (und diesmal nicht nur einen Sinusbogen, sondern eine vollständige Periode). Der Beweis ist ganz einfach und nur eine Wiederholung: Auch hier handelt es sich wieder um den Schnitt des Zylinders mit einer Ebene.

3 Konstruktiver Zugang und Anwendungen

3.1 Rechtecksmuster in der uv -Ebene

Sind Geraden in der uv -Ebene (oder parallel dazu) gegeben, die sich orthogonal schneiden, so erhält man Fluchtpunkte im Abstand von $\pi/2$. Ein derartiges Bei-

spiel liefert das Bild des Berliner Gendarmenmarkts (Abb. 11a) mit seiner rechtwinkligen Pflasterung. Dagegen gehören die linken und die rechten Sinusbögen, die sich nur in den Fluchtpunkten berühren, zu parallelen Geraden, zwischen denen die Kamera steht. Abbildung 11b hebt wieder zur Verdeutlichung einige dieser Sinuskurven hervor.



Abbildung 11a

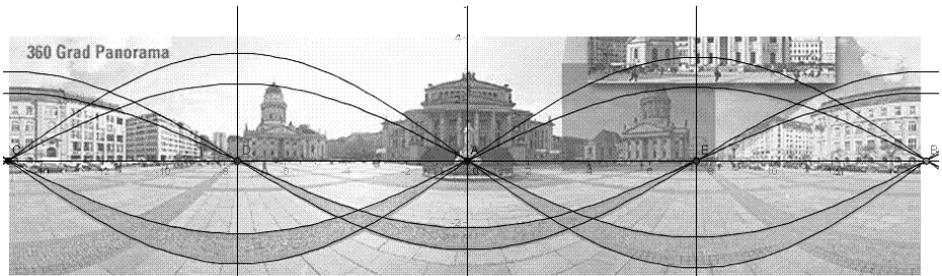


Abbildung 11b

3.2 Ein Zimmer – konstruiert

Als zweites Beispiel wollten wir hier die Panorama-Aufnahme eines Innenraums mit rechteckigem Grundriss zeigen und analysieren, um noch einmal die grundsätzliche Bedeutung der einzelnen Linien herauszuarbeiten. Wir suchten nach einer Innenaufnahme eines ganz schlichten Raums, der nicht vollgestopft und überladen mit allen möglichen Details ist, fanden aber keines, das uns gefiel. Daher haben wir uns darangesetzt, eine derartige Abbildung selbst zu konstruieren. Gezeigt werden soll auf unserem Bild also die Innenansicht eines beliebigen Quaders. Beginnen wir mit dem Grundriss, einem Rechteck mit den Ecken A , B , C , D (Abb. 12a).

Dabei bezeichnet K die Stelle, über der die Kamera stehen soll. Wir erhalten als Bild der Fußbodenkanten vier Ausschnitte aus Sinusbögen (Abb. 12b).

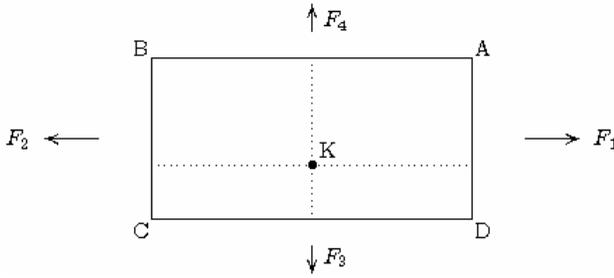


Abbildung 12a

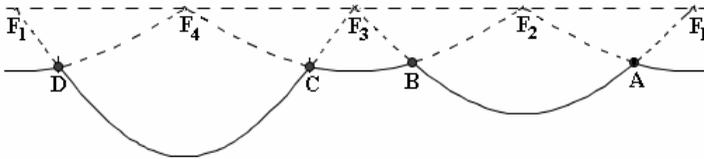


Abbildung 12b

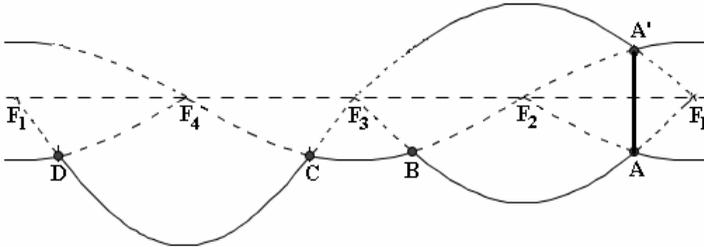


Abbildung 12c

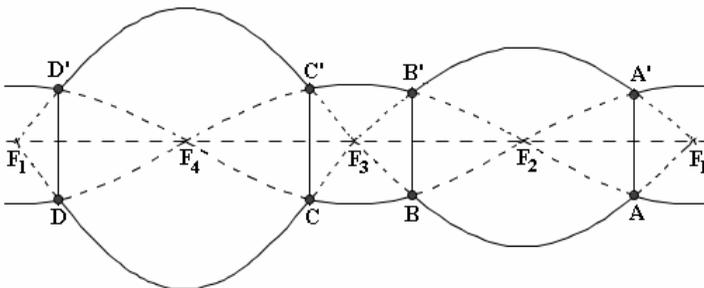


Abbildung 12d

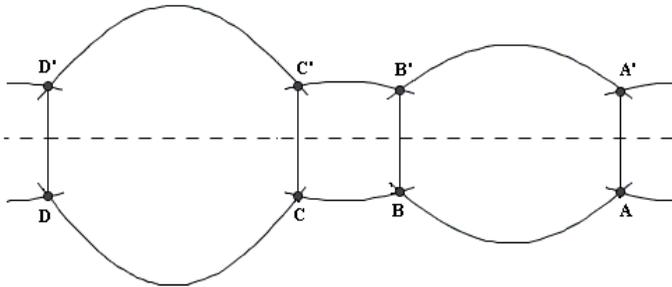


Abbildung 12e

Wir haben in der Grundriss-Zeichnung die Richtungen eingetragen, in denen die Fluchtpunkte F_1, \dots, F_4 liegen. Auf unserem Panorama-Foto sind die entsprechenden Fluchtpunkte markiert (es sind Punkte im Abstand $\pi/2$). Sobald die Lage dieser Fluchtpunkte fixiert ist, kennen wir die Lage der Sinusbögen – nicht aber die jeweiligen Amplituden: Diese sind abhängig vom Abstand der Wände von der Kamera (und grundsätzlich beliebig!). In unserem Beispiel gehen wir davon aus, dass die Kamera den gleichen Abstand von den Wänden BC und DA hat, also sind die zugehörigen Amplituden gleich. Dagegen ist die Kamera näher an der Wand AB und noch näher an der Wand CD , die zugehörigen Amplituden sind daher entsprechend größer.

Nun geben wir noch die Höhe vor, zum Beispiel also das Bild A' der Zimmer-Ecke über dem Punkt A (Abb. 12c). Wir werden die anderen Ecken der Zimmerdecke entsprechend mit B' , C' und D' bezeichnen.

Wir haben schon die Sinusbögen eingezeichnet, auf denen die Deckenkanten, die sich in A' treffen, liegen müssen. Dies liefert uns die Punkte B' und D' (als Schnittpunkte der Sinusbögen mit den vertikalen Geraden durch B bzw. D). Entsprechend erhalten wir nun die Sinusbögen für die beiden restlichen Deckenkanten. Diese müssen sich im Punkt C' schneiden, der vertikal über C liegt (Abb. 12d).

Natürlich ist dieses konstruierte „Foto“ nicht sehr realistisch, hat unser Raum doch nicht einmal eine Tür oder ein Fenster, durch die wir ihn hätten betreten können! (Abb. 12e, alle Hilfslinien bis auf die Horizontlinie sind gelöscht.)

Deshalb folgt noch eine kleine Vervollständigung (Abb. 12f) und zum Vergleich auch eine Außenansicht in Parallelprojektion (Abb. 12g).

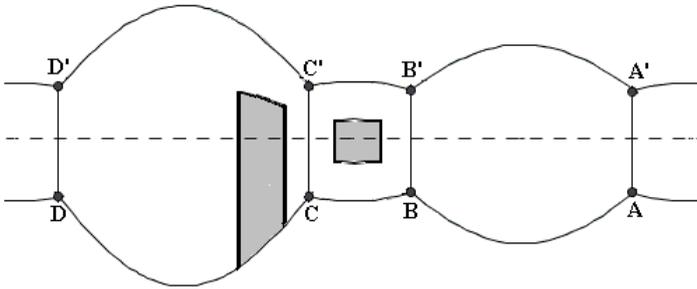


Abbildung 12f

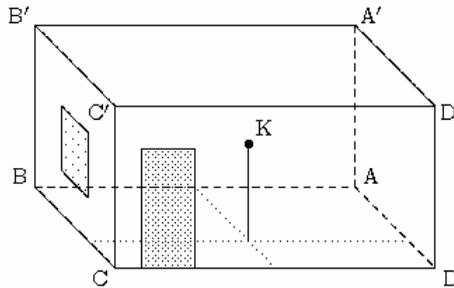


Abbildung 12g

3.3 Arc de Triomphe

Das Konstruieren derartiger Panorama-Bilder ist nicht viel schwerer als das von Bildern mit Zentralperspektive. Dafür eignen sich hervorragend Programme wie *GeoGebra*, mit denen man Funktionen plotten kann. Nimmt man F_3 als Ursprung und F_1 im Abstand π , so arbeitet man mit Funktionen der Form

$$f(x) = a \cdot \sin x \text{ und } f(x) = a \cdot \cos x,$$

das ist schon alles. Kommen weitere Geradenrichtungen hinzu (wie zum Beispiel bei einer abgeschrägten Ecke oder einem oktagonalen Grundriss), so braucht man zusätzliche Sinusfunktionen der Form

$$f(x) = a \cdot \sin(x + c).$$

Richtig aufregend wird es, wenn man an den Rundblick vom Arc de Triomphe in Paris denkt (Abb. 13a): 12 Straßen laufen hier zusammen! Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 13b zwei Ausschnitte, die sich leicht überlappen.



Abbildung 13a



Abbildung 13b

4 Rundblicke in der Geschichte

4.1 Zylinder-Projektionen

Sie wurden seit Urzeiten betrachtet, meist allerdings in einem etwas anderen Zusammenhang, nämlich in der Geografie: als Kartenprojektion. Entsprechende Abbildungen und Beschreibungen finden sich zuhauf. Hier wird eine Kugel (die Erde) auf einen Zylinder projiziert (damit man den abgerollten Zylinder als planare Karte verwenden kann), meist wird aber eine zusätzliche Stauchung der y -Achse vorgenommen. Typisches Beispiel ist die Mercator-Projektion⁵, mit der Erdachse als Zylinderachse (die Stauchung wird so gewählt, dass man eine winkeltreue Abbildung erhält; die Winkeltreue war für die Seefahrer sehr wichtig).

Betrachtet man einen Großkreis auf der Kugel, wie die Ekliptik oder die Schattengrenze des Sonnenlichts, so liefert die Zentralprojektion auf den Zylinder eine Ellipse, also auf dem abgerollten Zylinder eine Sinuskurve (denn Großkreise sind

⁵ Wolfgang Kroll wies uns darauf hin, dass man die Mercator-Projektion lieber Mercator-Abbildung nennen sollte, da es sich eben nicht um eine echte Projektion handelt.

Schnitte der Kugel mit Ebenen durch den Ursprung, also den Erdmittelpunkt). Abbildung 14 zeigt eine derartige Schattengrenze auf einer Mercator-Karte – dabei ist der Stauchungseffekt in der Nähe der Pole nicht zu übersehen.

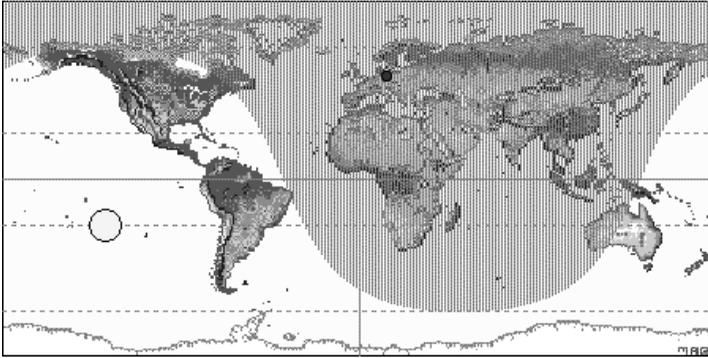


Abbildung 14

4.2 Rundbauten

Als Panoramen bezeichnet man auch Rundbauten wie das in Abbildung 13 gezeigte alte Gebäude des Salzburg-Panoramas. Sie waren seit dem Ende des 18. Jahrhunderts für viele Jahrzehnte große Publikumsmagnete: In einem derartigen Rundbau, also im Inneren eines Zylinders, wurde der vollständige Rundblick einer Landschaft oder eines historischen Ereignisses (oft waren es Schlachten) präsentiert. Die meisten dieser Gebäude wurden Anfang des 20. Jahrhunderts abgerissen, aber es entstanden auch neue, wie das in Bad Frankenhausen (Abb. 16) mit dem berühmten Bauernkriegs-Panorama des Malers Werner Tübke. Die Idee für solche begehbaren Zylinder geht auf Johann Adam Breysig und Robert Barker zurück. Barker ließ 1787 seine Erfindung patentieren.



Abbildung 15



Abbildung 16

Abbildung 17 zeigt das abgerollte Bild des weltweit ersten derartigen Panoramas: *London from the roof of Albion Mills* (1793). Dies ist also ein Gemälde, das einem 360°-Panorama-Foto entspricht, und man erkennt sofort einige der charakteristischen Bögen.



Abbildung 17

Gut erhalten ist das Salzburg-Panorama (das Bild, nicht jedoch der Rundbau) von Johann Michael Sattler, das in den Jahren 1825–1829 entstanden ist (Abb. 18). Es handelt sich um einen Rundblick von der Festung Hohensalzburg aus (die zur Entstehungszeit militärisch genutzt wurde, und damit auch den Salzburgern selbst nicht zugänglich war). Erhaltene Entwürfe von Sattler zeigen, dass er mit einem Gitterraster gearbeitet hat (Abb. 19).



Abbildung 18

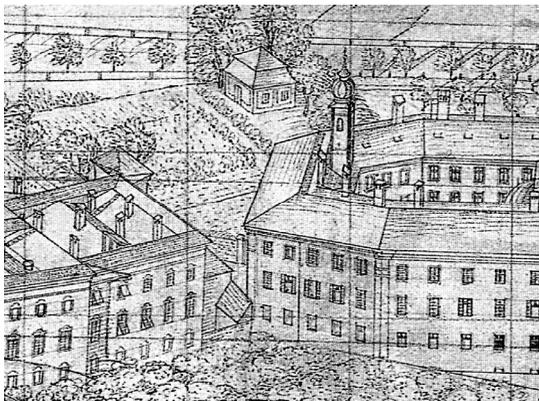


Abbildung 19

Sucht man nach den charakteristischen Sinusbögen, so wird man enttäuscht: Zum Beispiel verlaufen die einzigen Landstraßen, die dafür infrage kämen, ziemlich in Augenhöhe. Nun gibt es aber eine Reihe von Gebäuden, bei denen Sinusbögen zu sehen sein müssten – aber Sattler hat offensichtlich jedes einzelne Gebäude zentral-perspektivisch gezeichnet. Dies führt dazu, dass im Panorama-Museum bei einigen der dargestellten Gebäude geradlinige Dachkanten und Friese leicht gebogen erscheinen: Der Effekt ist umso stärker, je tiefer die Gebäude unter der Horizont-Linie erscheinen. Abbildung 20 zeigt ein Foto, das im Panorama-Museum aufgenommen wurde (der untere Bogen ist die Unterkante des Zylinder-Bildes):



Abbildung 20

Wir betrachten das helle Gebäude näher (es ist übrigens dasjenige Gebäude, das heute das Panorama-Museum beherbergt): Links (Abb. 21a) ein Ausschnitt aus dem (planen) Panorama-Bild, das Foto rechts (Abb. 21b) gibt noch einmal den Blick im Panorama-Museum wieder, diesmal mit eingezeichneten Hilfslinien, die zeigen, wie extrem die Abweichungen sind.

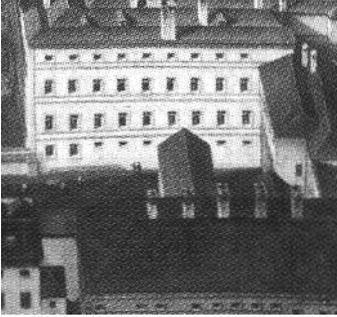


Abbildung 21a

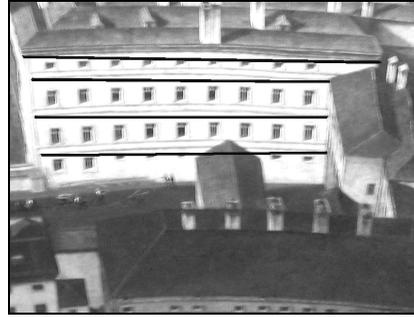


Abbildung 21b

Dass die Dachkante wie auch die Friese an den Häusern beim Blick im Panoramamuseum konvex erscheinen, kann nicht verwundern: Dargestellt sind Geraden unterhalb der Horizont-Linie, die also eigentlich als konkave Sinusbögen im Panorama-Bild zu zeichnen gewesen wären.

Zur Verdeutlichung seien hier zwei kleine Skizzen eingefügt (Abb. 22a und 22b). Nehmen wir an, der graue Bereich links sei die Vorderfront eines Hauses, gezeichnet in Panorama-Perspektive (Ober- und Unterkante müssen, wie wir wissen, auf Sinusbögen mit gleichen Fluchtpunkten E und F liegen). Unser Haus liege unterhalb der Augenlinien, also sind beide Sinusbögen konkav. Für den Betrachter im Inneren des Zylinders wird auf diese Weise der Eindruck erzeugt, dass die Punkte A und B geradlinig verbunden sind!

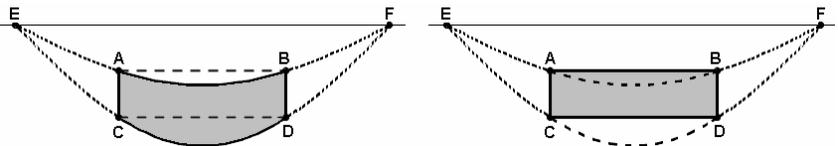


Abbildung 22a und b

Wird nun auf dem Panorama-Bild der Bogen zwischen A und B durch eine Strecke ersetzt, wie dies rechts geschehen ist (und wie man dies bei Sattler findet), so verläuft diese Strecke oberhalb des Sinusbogens und erzeugt somit für den Betrachter im Zylinder einen konvexen Bogen, wie dies in Abbildung 22b zu sehen ist.

Wir haben oben schon erwähnt, dass das Gebäude heute noch existiert. Abbildung 23 zeigt zum Vergleich eine „normale“ Fotografie. Wie man sieht, sind alle Dachkanten und Friese wirklich geradlinig.



Abbildung 23

4.3 Panoramabilder in der Fotografie

Das Jahr 1829 wird üblicherweise als Beginn des Zeitalters der Fotografie angesehen. Nach früheren Versuchen von Niépce entwickelte Daguerre ein Verfahren, um fotografische Abbildungen zu konservieren. Schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts begann man damit, Fotografien zu Panoramen aneinanderzureihen (so wie wir es beim Rundblick vom Arc de Triomphe gesehen haben). Mit Hilfe geeigneter Software („stitching“) können heute derartige Einzelbilder zu einem Panorama nahtlos zusammengesetzt werden. Schon früh (Joseph Puchberger 1843, Friedrich von Mertens 1844) wurden aber auch spezielle Kameras für Panoramafotografien entwickelt (meist mit einem senkrechten, schwenkbaren Schlitzverschluss oder mit einem sich drehenden Kameragehäuse).

Als Beispiel einer historischen Aufnahme zeigt Abbildung 24 ein (knapp) 180°-Bild von San Francisco nach dem Erdbeben von 1906, die Sinusbögen sind unübersehbar.



Abbildung 24

4.4 Ein weiteres Beispiel

Auch außerhalb des westlichen Kulturkreises war man sich wohl der Möglichkeiten der Panorama-Perspektive bewusst, wie ein Ausschnitt aus einer chinesischen Bildrolle zeigt (Abb. 25).



Abbildung 25

4.5 Griechische Tempel

Schließlich soll noch auf optische Effekte eingegangen werden, die beim Bau der griechischen Tempel Verwendung fanden.



Abbildung 26a und b

Bekanntlich weisen die klassischen griechischen Tempel ganz charakteristische Krümmungen auf (Abb. 26a und b). *Horizontal* betrifft dies den Architrav, also das Gesims über den Säulen, manchmal aber auch schon das Fundament, den Stylobat. Diese Linien sind dann konvex gekrümmt, man spricht von *Kurvatur*. *Vertikale* Krümmungen treten bei den einzelnen Säulen auf: sie verjüngen sich nach oben

hin, dies erfolgt jedoch nicht geradlinig, sondern mit einer Wölbung, so dass auf etwa einem Drittel der Höhe der größte Umfang (Entasis) erreicht wird. In der Literatur wird darauf verwiesen, dass durch derartige Krümmungen die geometrische Starrheit der Linien aufgebrochen werde und dass so der Bau harmonischer und lebendiger erscheine. Spätere Nachahmungen, bei den Römern wie auch im Klassizismus, die auf diese Krümmungen verzichteten, erscheinen dem Betrachter dagegen statisch und starr. Offensichtlich wird aber durch diese optischen Effekte auch der Eindruck der Monumentalität vergrößert. Die Ansicht entspricht derjenigen, die das wandernde Auge bei einem viel größeren Gebäude erzeugen würde. Eine mathematische Beschreibung der Krümmungen ist sicher von Interesse und wird seit langem diskutiert.

Wir wenden uns zunächst der Krümmung zu. Bei Schneider/Höcker (2001, S. 130 f.) liest man dazu, die ganze Architektur sei „sphärisch gekrümmt“ (vgl. Abb. 27).

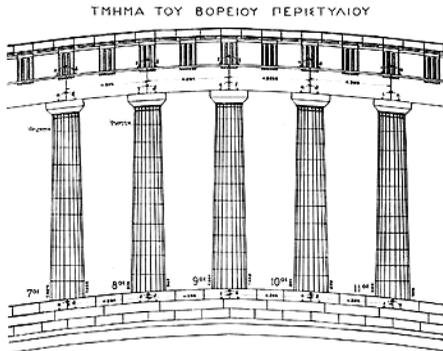


Abbildung 27

„Nicht auf einer ebenen Plattform erhebt sie sich, sondern gewissermaßen auf dem Ausschnitt einer riesigen Kugel“ (a. a. O., S. 131). Dazu werden dort u. a. die beiden folgenden Illustrationen geboten: „Stufenbau des Parthenon mit Krümmung. Nordseite, von Osten gesehen“ (Abb. 28) und „Kurvatur des Parthenon, schematisch verstärkt“ (Abb. 29). Unsere Überlegungen legen nahe, dass es sich nicht etwa um eine sphärische oder elliptische Krümmung, sondern um (Ausschnitte von) Sinuskurven handeln sollte, und die Höhenlage derartiger Tempel erklärt, warum oft schon das Fundament konvex gekrümmt gebaut wurde. Diese Sinuskurven entsprechen also denen der Panorama-Fotografie, die durch die Drehung des Kopfes hervorgerufen werden (Abb. 30).

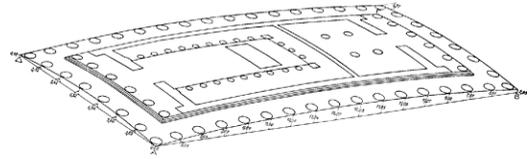


Abbildung 28

Abbildung 29

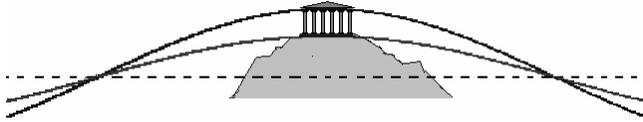


Abbildung 30

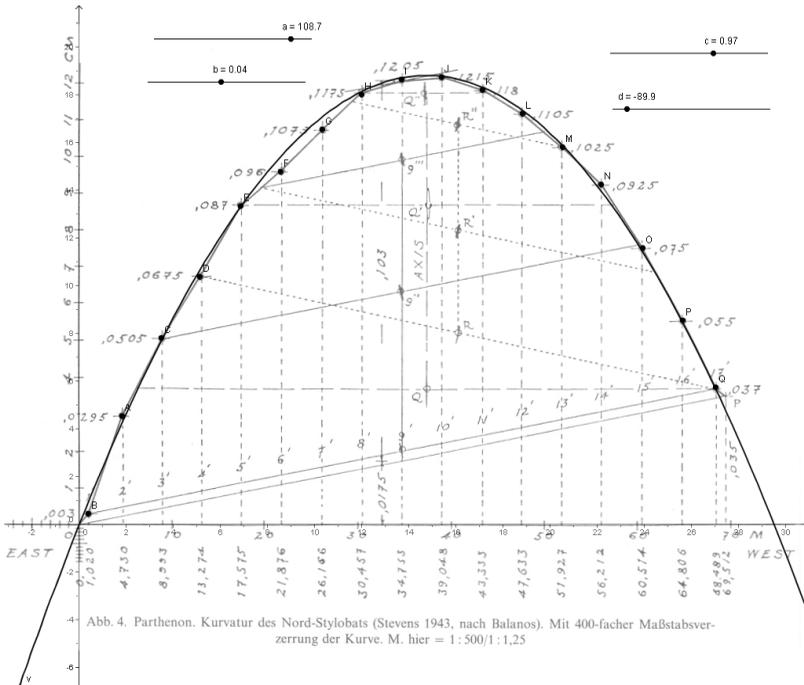


Abbildung 31

Das Diagramm in Abbildung 31 zeigt die Krümmung des Nord-Stylobats des Parthenon (mit 400-facher Maßstabs-Verzerrung); eingezeichnet ist eine entsprechende Sinuskurve, die Vorlage stammt von Stevens (1943) und ist Haselberger/Seybold (1991) entnommen. Es ist sicher von Interesse, sich den Gesamtverlauf dieser Sinuskurve vor Augen zu führen (Abb. 32).

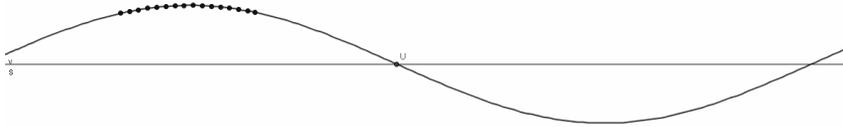


Abbildung 32

Natürlich findet man auch Ellipsen und Parabeln, die als Approximationen⁶ infrage kämen. Dazu gibt es eine Vielzahl von Publikationen, siehe insbesondere Haselberger/Seybold (1991) und Haselberger (1999) – nur scheint es keine einleuchtende Begründung für die Wahl derartiger Kurven zu geben.

Wir wenden uns nun der Entasis zu (siehe insbesondere Thomä 1915). Hier ist die Krümmung des Schafts einer Säule zu interpretieren, wobei nun die Augenbewegung beim Heben und Senken des Kopfes nachvollzogen wird. Das uns vertraute Bild der Sinuskurven ist um 90° zu drehen⁷. Während die Krümmung oft kaum bemerkbar ist, sind die Krümmungen vieler Säulen sehr auffallend (beim Hera-Tempel in Paestum verjüngen sich die Säulen von unten 2,09 m auf 1,55 m oben). Abbildung 33 zeigt zwei Säulen in Paestum, in Abbildung 34 wird eine schematische Konstruktions-Skizze für den Umriss einer derartigen Säule mit Hilfe zweier Sinuskurven (mit gleicher Frequenz und Phase, aber entgegengesetzter Amplitude) dargestellt.

⁶ Die Frage der optischen Ähnlichkeit von Sinusbögen und Parabelbögen wird in den Abschnitten 5.1 und 5.2 diskutiert.

⁷ Verwiesen sei hier auf das Straßenbahnfoto am Ende dieser Arbeit, das ein Panorama-Foto zeigt, bei dem die Drehachse des Kamera-Schwenks ebenfalls nicht vertikal, sondern horizontal ist und so der Augenbewegung beim Heben und Senken des Kopfes entspricht. Anzumerken ist, dass es bei einigen griechischen Tempeln zu einer Kopplung der beiden Kopfbewegungs-Effekte (horizontal, vertikal) kommt: So werden randständige Säulen zusätzlich zur Mitte hin geneigt. Dies erinnert dann an die Fischaugen-Perspektive, also weniger an eine Projektion auf einen Zylinder, als auf eine Kugel. Dennoch meinen wir, dass zumindest die einzelnen Krümmungen in erster Näherung sehr gut durch Sinus-Kurven beschrieben werden können. Diese Interpretation liefert auch eine Erklärung für die vielbeschworene Dynamik, die bei einem massiven Steinbau eher überrascht: Es ist die Dynamik der Kopfbewegungen, die durch die Verwendung von Sinus-Kurven simuliert wird.



Abbildung 33

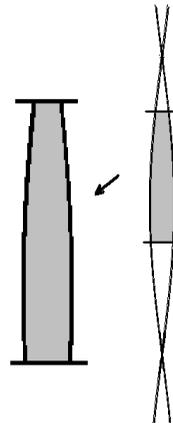


Abbildung 34

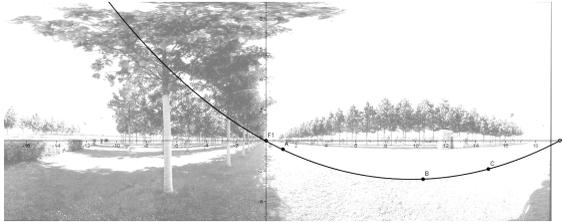
5 Variation des Modellierungsansatzes

5.1 Beispiele

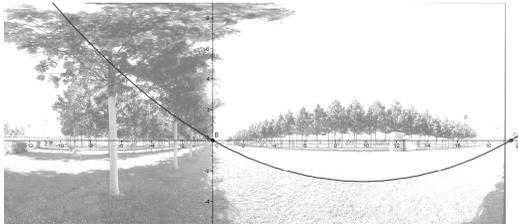
Andere mathematische Modellierungen der Kurven des Panorama-Bildes von Riem wie auch des Panorama-Bildes des Gendarmenmarkts sind natürlich möglich: als Parabeln, als Hyperbel-Äste, als Ellipsen – und man erreicht dies lokal mit recht hoher Genauigkeit (vgl. Abb. 35a–c).

Die Hyperbel und die Ellipse lassen sich leicht mit *GeoGebra* erzeugen: Man zeichnet den zu fünf Punkten gehörenden Kegelschnitt und passt die Kurve an, indem man die Punkte möglichst genau auf die gewünschte Linie zieht; hier wurden die Fluchtpunkte mit einbezogen und dann nicht mehr verändert, nur die drei anderen Punkte wurden noch zurecht geschoben. Die Parabel dagegen ließ sich auf diese Weise nicht finden, hier war das Fingerspitzengefühl nicht an die nötige Geduld gekoppelt. Es war leichter, einen Funktionsterm anzupassen.

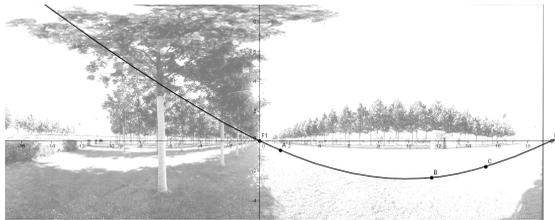
Die Parabel-Approximation ist zwar nicht ganz optimal, aber die Abweichungen fallen nicht wirklich auf. Betont werden sollte, dass eine Parabel-Approximation sofort auch Ellipsen- und Hyperbel-Approximationen liefert – geeignete kleine Störungen einer Parabelgleichung führen zu Ellipsen- wie auch zu Hyperbelgleichungen.



Ellipse: $5,43x^2 - 0,29xy + y^2 - 106,6x - 200y = 0$



Parabel: $f(x) = 0,0285x(x - 19,5)$



Hyperbel: $4,86x^2 - 0,04xy - 6,77y^2 - 95,36x - 200y = 0$

Abbildung 35a–c

Unsere Ausgangsfrage, wie die charakteristischen Kurven eines Panoramafotos (der Bilder horizontal verlaufender Geraden) mathematisch zu beschreiben sind, lässt sich durch optische Modellierungsversuche nicht entscheiden. Nur die theoretischen Überlegungen, die wir gleich zu Beginn angestellt haben, liefern als eindeutiges Ergebnis, dass es sich um Sinusbögen handelt.

Es gibt aber durchaus auch direkte heuristische Argumente dafür, dass die Wahl von Sinusbögen naheliegend ist. Wegen der zugrunde liegenden Drehung sollte man von Anfang an trigonometrische Funktionen denken! Auch aus einem anderen Grund sind die Sinusbögen den Parabeln und den Hyperbel-Ästen überlegen:

Die Kurven, die wir approximieren wollen, haben endliche Länge, sie enden in den beiden Fluchtpunkten. Bei den Sinusbögen sind diese Endpunkte die Wendepunkte der Kurve, also wohlbestimmte Punkte auf dem Funktionsgraphen. Weder die Parabeln noch die Ellipsen oder die Hyperbel-Äste besitzen jedoch derartig ausgezeichnete Punkte.

5.2 Kurvenvergleich

An dieser Stelle erscheint es wünschenswert, eine Reihe von Funktionsklassen, die zur Modellierung herangezogen werden können, direkt zu vergleichen. Wenn wir das Strecken und Stauchen in Richtung der Koordinaten-Achsen unberücksichtigt lassen, so können wir uns auf folgende Grundsituation beschränken: Wir betrachten Funktionen $f: [-1;1] \rightarrow [0;1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- f ist gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle x .
- $f(0) = 0$ und $f(-1) = f(1) = 1$
- f besitzt im Inneren des Intervalls $[-1;1]$ keinen Wendepunkt.

Beispiele für derartige Funktionen sind:

- Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln
- Sinuskurven
- Kettenlinien

In den folgenden Abbildungen wird der Definitionsbereich der betrachteten Funktionen f vergrößert, um auf diese Weise das globale Verhalten dieser Funktionen anzudeuten. Wie wir sehen werden, unterscheiden sich die betrachteten Funktionen im Intervall $[-1;1]$ nur wenig, dagegen ist ihr Verhalten außerhalb dieses Intervalls recht verschieden. Eine typische Funktion f mit den genannten Eigenschaften ist die Normalparabel $p(x) = x^2$. Sie dient im Folgenden jeweils als Vergleichsfunktion und wird immer in dem Doppelquadrat $[-1;1] \times [0;1]$ gepunktet eingezeichnet sein.

Wenden wir uns als erstes den Kegelschnitten zu: sie bilden eine Einparameter-Familie, die mit einem Halbkreis mit Radius 1 beginnt und sich immer mehr der Betragsfunktion annähert. Dazwischen gibt es die Normalparabel $p(x)$, die wie immer gepunktet dargestellt ist. Als Funktionsterm für die Ellipsen berechnet man

$$f_c(x) = c - \sqrt{(1-2c)x^2 + c^2} \quad \text{mit } c \geq 1$$

Für $c=1$ erhält man den Halbkreis mit Radius 1. Abbildung 36 zeigt ihn gestrichelt und drei weitere derartige Graphen mit $c=1,2$, $c=1,5$ und $c=3$ (und zusätzlich die Normalparabel).

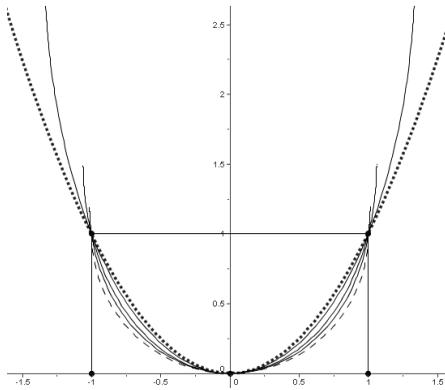


Abbildung 36

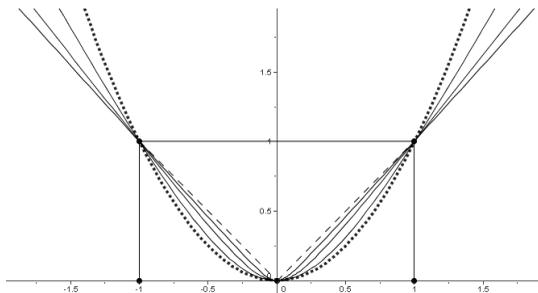


Abbildung 37

Als Funktionsterm für die Hyperbeln berechnet man

$$f_c(x) = c - \sqrt{(1-2c)x^2 + c^2} \quad \text{mit } c < 1$$

Abbildung 37 zeigt die drei Hyperbel-Äste mit $c = -0,1$, $c = -0,3$ und $c = -1,2$, außerdem die Normalparabel und die Betragsfunktion. Dabei liegt der Hyperbel-Ast zu $c = -1,2$ nahe an der Parabel, der zu $c = -0,1$ nahe an der Betragsfunktion.

Da wir hier nur an geraden Funktionen interessiert sind, betrachten wir statt der Sinusfunktion lieber den Cosinus. Als Funktionsterm berechnet man

$$g_c(x) = \frac{1 - \cos(cx)}{1 - \cos c} \quad \text{mit } 0 < c \leq \frac{\pi}{2},$$

dabei ist

$$a = \frac{1}{1 - \cos c}$$

die Amplitude, und die Gerade durch die Wendepunkte ist $y = a$. Die Bedingungen an c bedeuten gerade, dass $a \geq 1$ gilt. Insbesondere erhalten wir für $c = \pi/2$ den Wert $a = 1$, also eine halbe Schwingung. Abbildung 38 zeigt die drei Graphen zu $c = 0,6$, $c = 1,18$ und $c = \pi/2$ und wieder zum Vergleich die Normalparabel. Für $c = 0,6$ erhält man einen Graphen, der sich nur geringfügig von dem der Normalparabel unterscheidet.

Im Hinblick auf die mathematische Beschreibung der Krümmung haben Haselberger/Seybold (1991) darauf hingewiesen, dass es sich um Kettenkurven (oder Seilkurven, also den Cosinus hyperbolicus) handeln könnte. Daher wollen wir auch diese Funktionen betrachten, also

$$h_c(x) = \frac{e^{cx} + e^{-cx} - 2}{e^c + e^{-c} - 2} \text{ mit } c > 0.$$

Abbildung 39 zeigt die drei Graphen mit $c = 0,1$, $c = 2$ und $c = 3$ sowie die Normalparabel. Für $c = 0,1$ ist der Graph von dem der Normalparabel optisch nicht zu unterscheiden.

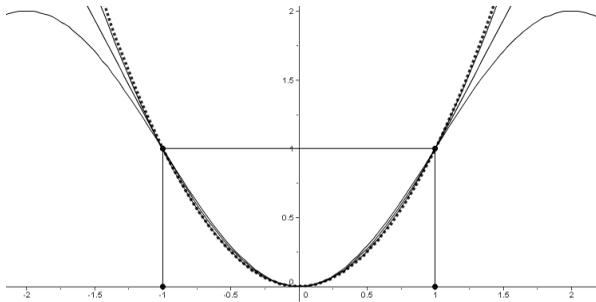


Abbildung 38

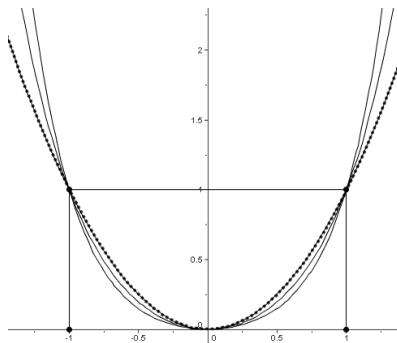


Abbildung 39

In jeder der betrachteten Funktionsscharen spielt jeweils eine der Funktionen eine besondere Rolle:

- Bei den Kegelschnitten die Normalparabel, die wir mit $p(x) = x^2$ bezeichnen,
- bei den Sinusfunktionen die Funktion $g(x) = g_{\pi/2}(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- schließlich die eigentliche Kettenlinie $h(x) = h_1(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e + e^{-1} - 2}$.

Zeichnet man sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem, so sieht man, dass sich die Graphen sehr ähneln (Abb. 40). Es gilt $h(x) \leq p(x) \leq g(x)$ für alle x mit $-1 \leq x \leq 1$. Im nächsten Koordinatensystem sind die Abweichungen der Kettenlinie und des Cosinus von der Parabel, also $p(x) - g(x)$ und $p(x) - h(x)$ eingetragen (Abb. 41).

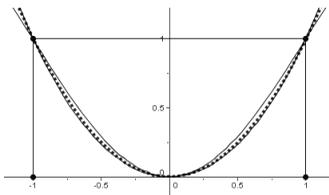


Abbildung 40

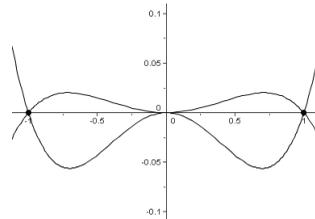


Abbildung 41

Zusammenfassend halten wir fest, dass die hier betrachteten Funktionen über dem Intervall $[-1; 1]$ ein ganz ähnliches Verhalten zeigen und dass sich die zugehörigen Funktionswerte nur wenig unterscheiden. Ohne viel Mühe kann man daher jede dieser Funktionen durch Funktionen einer der anderen Funktionenklassen recht gut approximieren. Die Abweichungen können offensichtlich noch erheblich geringer gehalten werden, wenn man die Bedingungen $f(0) = 0$ und $f(-1) = f(1) = 1$ fallen lässt. Bei den Modellierungsproblemen, mit denen wir uns hier beschäftigen (Kurven auf Fotos, aber auch Krümmung und Entasis) sind die Ausgangsdaten ungenau und auch fehlerbehaftet, so dass diese Kurven ganz verschiedenartig modelliert werden könnten – eine Entscheidung für einen bestimmten Kurventyp kann daher kaum durch numerische Daten erfolgen.

6 Panoramabilder im Schulunterricht

Die in diesem Artikel angesprochene Thematik eignet sich in vielfältiger Weise für den Unterricht der Sekundarstufen I und II und zwar sowohl für den Mathematik-Unterricht selbst, als auch für fächerübergreifende Projekte.

Im Einzelnen kann an folgende Themenstellungen denken:

- Modellierung gegebener Kurven durch Funktionen, wie dies in Teil 5 angedeutet wurde. Im Artikel wurde darauf verzichtet, die jeweiligen Funktionsterme herzuleiten, dies müsste im Unterricht nachgeholt werden. Von Interesse ist hier insbesondere die lokale Ähnlichkeit von Funktionen, die global ganz verschiedenartige Verhaltensweisen zeigen.
- Das Experimentieren mit Sinusfunktionen mit gleicher Frequenz aber unterschiedlichen Amplituden und Phasen. Man kann hier die Aufgabe stellen, das Klassenzimmer, die Aula, oder eine nahe gelegene Straßenkreuzung in Panorama-Perspektive zu skizzieren. Ein derartiges Beispiel haben wir im Abschnitt 3.2 vorgeführt.
- Die mathematische Beschreibung der Zylinder-Projektion. Dies ist die Grundproblematik für das Arbeiten mit Panoramafotos, siehe Abbildung 2. Zwar geht hier nur ein Strahlensatz und die Definition des Sinus ein, es handelt sich aber um eine Situation im 3-dimensionalen Raum, die erst einmal auf Schwierigkeiten stoßen kann – gerade hierin liegt aber ein gewisser Reiz, spielt doch das 3-dimensionale Sehen und Verstehen im gegenwärtigen Schulunterricht eine ausgesprochen untergeordnete Rolle.
- Die systematische Analyse der Beziehung einer beliebigen Geraden zu einem vorgegebenen Zylinder (siehe Abschnitt 2.1).

Bei all diesen Themenstellungen kann (und sollte) der Unterricht handlungsorientiert sein, es bieten sich der Einsatz von Geometrie-Software aber auch das eigenständige Herstellen von Panorama-Fotografien an. Daneben gibt es vielfältige Möglichkeiten mit konkreten Zylinder-Modellen zu experimentieren.

Die oben genannten Themen orientierten sich an den mathematischen Fragestellungen, die in diesem Aufsatz zur Sprache gekommen sind, hier sollen sie noch einmal explizit genannt werden. Zu allererst zu nennen sind:

- Strahlensätze
- Ellipsen als Schnitte von Ebenen mit einem Zylinder
- Die Sinusfunktion zur Koordinatisierung eines Kreises (aber auch von Ellipsen)
- Amplitude, Frequenz und Phase einer allgemeinen Sinus-Schwingung

Dann aber auch:

- Die Koordinatisierung eines Hyperbel-Astes, und schließlich
- Kettenfunktionen (und damit der Cosinus hyperbolicus)

Wenn man an fächerübergreifenden Unterricht denkt, so gibt es auch hier ganz verschiedene Varianten. Der Vergleich zwischen der Zentral-Perspektive und der Zylinder-Perspektive sollte in Verbindung mit dem Kunstunterricht erfolgen (oft werden Frage der Perspektive auch im Physik-Unterricht angesprochen). Vom Ansatz her ganz anders erscheint die Thematisierung von Krümmung und Entasis bei den griechischen Tempeln, auch hier handelt es sich vorrangig um eine Zusammenarbeit mit dem Kunst-Unterricht (gegebenenfalls aber auch im altsprachlichen Unterricht).

Die Frage nach den Bögen auf Panoramabildern bietet eine nicht alltägliche Gelegenheit zum Modellieren, die die Schülerinnen und Schüler anspricht. Motivationsfördernd ist dabei die Tatsache, dass sich erfahrungsgemäß etliche Jugendliche schon einmal mit Panoramafotos anhand der eigenen Kamera beschäftigt haben oder dies parallel zu einer derartigen Unterrichtsreihe unmittelbar ausprobieren. Auch stellt es eine gewisse Herausforderung dar, sich zunächst in solche Fotos hineinzudenken, um zu erkennen, dass dies 360° -Bilder sind.

Unterrichtserfahrungen liegen bisher zur ersten und dritten Themenstellung vor, und zwar durch eine Unterrichtsreihe in der zehnten Klasse eines Gymnasiums (Menze/Ringel 2007) als Zusammenfassung zum Abschluss der Trigonometrie und zur Wiederholung von Parabeln. Betrachtet wurde der überschaubare Fall von Geraden, die parallel zur Augenebene verlaufen (siehe Abb. 2). Die Erfahrung, dass man offensichtlich rein empirisch (dynamische Kurven-Anpassungen mit *Excel*) nicht entscheiden kann, um welche Funktionen es sich hier handelt, war für die Schülerinnen und Schüler dieser 10. Klasse völlig neu und erhöhte ihre Bereitschaft, zur Beantwortung dieser Frage ein weitergehendes mathematisches Modell heranzuziehen.

Verwendet wurde für die Untersuchung der auftretenden Phänomene ein großer aus Acrylfolie aufgerollter Zylinder (Abb. 42a): Im Zylinder sitzend wurden auf dem Schulhof gerade Linien (zum Beispiel die Dachkante) nachgezeichnet, dann wurde der Zylinder abgerollt und die entstandenen Linien mit der Wirklichkeit verglichen.

Wie man aus dem Abrollen des Zylinders die Funktionsgleichung herleitet, führt auf eine Weise in die Mathematik der vergangenen Jahre, wie es sich nicht oft im Zusammenhang ergibt. Völlig überraschend war es für die meisten, dass das Problem auch als Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene betrachtet werden kann. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, mit Hilfe von Zylindermodellen praktisch nachzuvollziehen, wie aus Geraden Bögen entstehen, wie aus Ebenenschnitten erst Ellipsen und dann durch Abrollen Sinuskurven entstehen. Hierzu können Pappker-

nen von Toilettenpapier-Rollen verwendet werden: Die Rollen werden schräg angesägt, dann werden DIN-A6 Karten (Postkarten) hineingesteckt, auf denen die betrachteten Geraden aufgezeichnet sind. Ein Schaschlik-Spieß verdeutlicht die u -Achse (Abb. 42b). Eine aufwendigere Variante (Abb. 42c), mit der die Projektion einer Geraden auf den Zylinder verdeutlicht werden kann, lässt sich aus einfachen Materialien herstellen, hier sei wieder auf Menze/Ringel (2007) verwiesen.



Abbildung 42a–c

Die Untersuchung von Panoramafotos im Unterricht ist ein Unterrichtsprojekt, das sich sowohl für den Mathematikunterricht wie auch fächerübergreifend zusammen mit dem Kunstunterricht anbietet. Wichtig dabei ist vor allem auch, dass es sich hier um eine Erfahrung mit räumlicher Geometrie handelt, wie sie im Mathematikunterricht der Sekundarstufen nur selten vorkommt.

7 Schlussbemerkungen

7.1 Panorama-Sicht vs. Zentralperspektive

Panorama-Bilder liefern überraschende Eindrücke. Sie erscheinen auf den ersten Blick völlig unnatürlich. Offensichtlich entsprechen sie nicht dem üblichen Bilderkanon, an den sich jeder gewöhnt hat. Es ist die Zentralperspektive (also die Zentralprojektion auf eine Ebene), die man als die natürliche Sichtweise verinnerlicht hat, obwohl solche Bilder nur den starren Blick festhalten und das Wandern der Augen, das Drehen des Kopfes, erst recht aber das Drehen des ganzen Körpers außer acht lassen. Durch die Bilderflut, der man täglich ausgesetzt ist und die fast ausschließlich zentralperspektivisch angelegt ist, wird unbewusst unsere Vorstellungswelt eingeengt. Immerhin zeigt die Kunstgeschichte, wie lange es gedauert hat, bis sich die Zentralperspektive in der Malerei überhaupt durchgesetzt hat. Warum auch sollte die Zentralprojektion auf eine Ebene (und nicht auf einen Zylinder

oder eine Kugel⁸) die selbstverständliche Modellierung des Sehens sein? Leicht übersieht man, dass mit Hilfe der Zentralperspektive nur Ausschnitte der Umgebung des Betrachters darstellbar sind. Lokal liefert unser Sehen Bilder, die den Regeln der Zentralperspektive entsprechen, der globale Eindruck aber ist ein anderer. Auch die Panorama-Bilder folgen in kleinen Ausschnitten ziemlich genau den Regeln der Zentralperspektive, nur gehen sie darüber hinaus.

Mit etwas Übung stellt man zur eigenen Überraschung fest, dass sich all die geraden Linien, die man zu sehen meint, wenn man durch eine Straße geht oder vor seinem Schreibtisch hockt, spätestens beim Drehen des Kopfes als gar nicht geradlinig erweisen, sondern als Bögen! Noch deutlicher wird man dieser Bögen gewahr, wenn man sich auf einen Drehstuhl setzt und dann langsam oder auch immer schneller im Kreis dreht: Dabei wird ja gerade das ganze Panoramabild abgerollt.

Von Interesse scheint also folgender Satz zu sein, der sich bei Bollnow (2004, S. 78) findet:

„Im erlebten Raum gibt es außer den Senkrechten, die nach den Regeln des Zeichenunterrichts immer senkrecht bleiben, nur noch waagrechte Parallelen.“

Und diese waagrechten Geraden sehen wir als Sinusbögen.

7.2 Weitere Sinuskurven

Zum Abschluss noch eine Aufnahme der Straßenbahn in San Francisco (Abb. 43a). Auch hier sieht man Sinuskurven, diesmal aber in y -Richtung! Die Kamera wurde um eine horizontale Achse um 180° geschwenkt.

Betrachten wir nur das obere Drittel des Fotos, so sehen wir eine Straßenflucht in San Francisco mit der berühmten Straßenbahn, dem Cablecar. Die Kamera schwenkt nach unten, konzentriert sich auf die Schienen. Schließlich kommt die entgegen gesetzte Straßenflucht in Sicht: Das untere Drittel des Fotos ist ihm gewidmet.

Auch gedreht ist das Foto von Interesse (Abb. 43b). Hier sieht man die Sinusbögen in der gewohnten Form. Die mittlere Schiene, in der das Kabel verläuft, ist übrigens (fast) ein Beispiel, das den Fall 5 (Abschnitt 2.1) verdeutlicht.

⁸ Man könnte versucht sein, die Projektion auf die Kugel als optimale Modellierung unseres Sehens zu interpretieren und die Bevorzugung der Projektion auf den Zylinder nur damit zu rechtfertigen, dass ein Zylinderbild abrollbar, also auf Papierblättern wie auf Bildschirmen verzerrungsfrei reproduzierbar ist. Aber man übersieht dabei, dass unser Denken (und Sehen) sehr klar zwischen horizontal (den uv -Richtungen) und vertikal (der w -Richtung) unterscheidet. Insofern scheint uns die Projektion auf den Zylinder möglicherweise von größerer Bedeutung als die auf die Kugel zu sein.

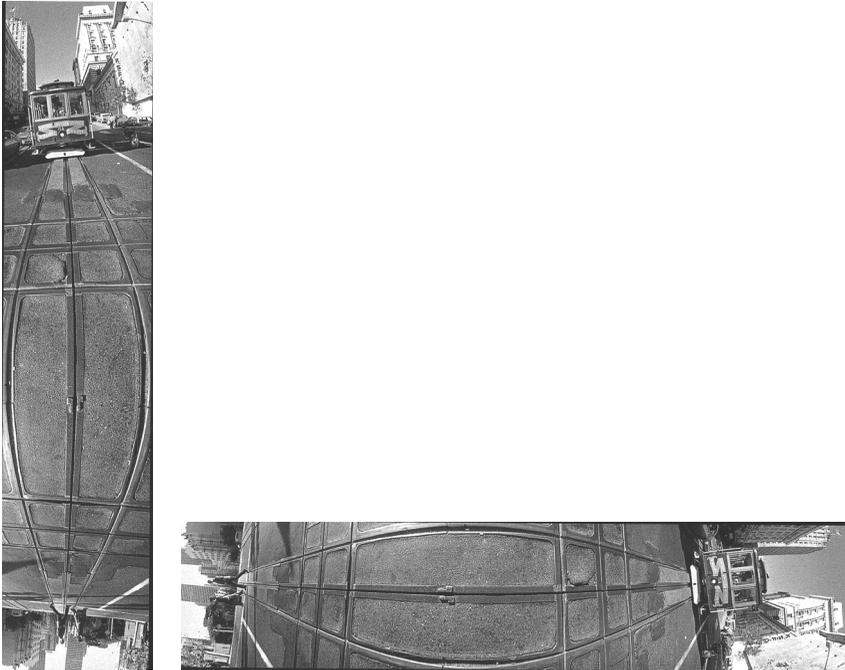


Abbildung 43a und b

Literatur

- Kunst- und Ausstellungshalle der Bundesrepublik Deutschland, Bonn (1993) (Hrsg.): Seh-sucht. Das Panorama als Massenunterhaltung des 19. Jahrhunderts. Katalog zur Aus-stellung. Stroemfeld/Roter Stern
- Bollnow, O. F. (2004): Mensch und Raum. Stuttgart: Kohlhammer 2004 (10. Auflage)
- Haselberger, L. (1999) (Hrsg.): Appearance and Essence – Refinements of Classical Archi-tecture: Curvature. Proceedings of the Second Williams Symposium on Classical Archi-tecture. Philadelphia: University of Pennsylvania Museum
- Haselberger, L./Seybold, H.: Seilkurve oder Ellipse? Zur Herstellung antiker Kurvaturen nach dem Zeugnis der didymeischen Kurvenkonstruktion. In: Archäologischer An-zeiger 1991, S. 165–188
- Marx, E. /Laub, P. (2005) (Hrsg.): Das Salzburg-Panorama von Johann Michael Sattler. Band I. Das Werk und sein Schöpfer. Salzburg: Salzburger Museum Carolino Aug-usteum
- Meers, N. (2003): Faszination Panoramafotografie. München: Laterna Magica
- Menze, R./Ringel, B. (2007): Oh, wie schön sind Panoramen! Mit Panoramafotografie Zy-linderprojektionen und Sinuskurven erkunden. In: mathematik lehren 140, S. 55–59
- Schneider, L./Höcker, Ch. (2001): Die Akropolis von Athen. Darmstadt: Primus Verlag

- Stevens, G. P. (1943): The Curve of the North Stylobat of the Parthenon. In: *Hesperia* 12, S. 135–143
- Thomä, W. (1915): Die Schwellung der Säule (Entasis) bei den Architekturtheoretikern bis in das XVIII. Jahrhundert. Dresden

Abbildungen

- Abb. 1: Ingo Kohwagner, *Süddeutsche Zeitung*, 8./9. Oktober 2005
- Abb. 7: <http://www.panphoto.de/>
- Abb. 11: www.panoshot.de/de/
- Abb. 13: <http://www.paris.org/Curiosites/EtoilePan/>
- Abb. 14: <http://www.jgiesen.de/daylight/details/map.gif>
- Abb. 15: <http://www.smca.at>
- Abb. 16: <http://www.bad-frankenhausen.de>
- Abb. 17: http://www.panoramafoto.ch/panorama_geschichte.htm
- Abb. 18: <http://www.smca.at>
- Abb. 19: Marx/Laub (2005), S. 66 Ausschnitt
- Abb. 21a: Ausschnitt aus dem Faltposter des Panoramamuseums Salzburg
- Abb. 24: http://memory.loc.gov/ammem/collections/panoramic_photo/
- Abb. 26a: <http://www.pitt.edu/~tokerism/0040/greek.html>
- Abb. 26b: http://www.volny.cz/kamil.fris/poseidonie/Hera%20II_PaestumB.jpg
- Abb. 27: <http://www.utexas.edu/courses/classicalarch/images3/parthenoncurve.jpg>
- Abb. 28: Schneider/Höcker (2001), S. 131
- Abb. 29: Schneider-Höcker (2001), S. 131; siehe auch
<http://www.utexas.edu/courses/classicalarch/images3/parthenoncurve.jpg>
- Abb. 31: Stevens (1943), nach Haselberger/Seybold (1991), S. 7
- Abb. 33: <http://luna.cas.usf.edu/~demilio/images/greek/gktmples.htm>
- Abb. 43a und b: Meers (2003), S. 43

Alle anderen Zeichnungen und Bilder wurden von den Verfassern erstellt.

Empfehlung von Internetadressen

Viele schöne Panorama-Bilder findet man u. a. unter den folgenden Adressen im Internet:

<http://www.berlin-vr.de/de/pano/>

<http://www.hfinster.de/StahlArt2/Tours-Pano-de.html>

<http://www.panoshot.de/de/>

Die DLR hatte ein Forschungsprojekt zu den Möglichkeiten der Panoramafotografie:

http://www.dlr.de/os/forschung/projekte_os/finished/panorama

Das Abrollen eines Panorama-Bilds kann man sehr gut in folgender Animation nachvollziehen: <http://www.smarterweb.de/>

Will man Panorama-Fotos selbst im Rundblick ablaufen lassen, so ist hierfür der PTVIEWER hilfreich. Das Programm kann kostenlos im Internet heruntergeladen werden, z. B. unter folgenden Adressen:

http://home.no.net/dmaurer/~dersch/index_deutsch.html

<http://www.fsoft.it/panorama/ptviewer.htm>

Will man eine Serie von Fotos selbst zu einem Panoramabild zusammensetzen, kann man dies z. B. mit Programmen der Firma Ulead bewerkstelligen: <http://www.ulead.de>

Und man findet im Internet sogar eine Anleitung zum Selbstbau einer 150°-Panorama-Kamera: <http://www.oberberg-online.de/~reincke/lochkam/slbstbau.htm>

Anschrift der Verfasser

Barbara Ringel
Helmholtz-Gymnasium
Ravensberger Str. 131
33607 Bielefeld
e-Mail: b_ringel@t-online.de

Claus Michael Ringel
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld
33501 Bielefeld
e-Mail: ringel@math.uni-bielefeld.de

Eingang Manuskript 14.09.2006 (überarbeitetes Manuskript: 24.02.2007)