Komplexe Zahlen

Ich hab euch hier mal eine kurze Zusammenfassung über die komplexen Zahlen geschrieben. Hoffe sie hilft euch wenigsten ein bißchen weiter

Was sind die komplexen Zahlen

Man kann sich die komplexen Zahlen einfach vorstellen als 2-dimensionale Punkte. Der Betrag einer komplexen Zahl ist so einfach definiert, durch den Abstand zum Ursprung. Es gibt zwei Möglichkeiten die komplexen Zahlen zu beschreiben. Einmal durch 2 Koordinaten (wie man ja auch Punkte schreibt) und einmal durch Winkel zur x-Achse (reelle Achse) und Betrag. Beide Darstellungen beschreiben eine komplexe Zahl eindeutig.
Schreibweise:
Punktschreibweise: $z = (a/b)$, wobei a die x-Koordinate (Realteil) ist und b die y-Koordinate (Imaginärteil)
Real-Imaginärschreibweise: $z = a + bi$, wobei a der Realteil und b der Imaginärteil ist.
Polarkoordinatenschreibweise: $z = re^{i\phi}$, wobei r der Betrag und ϕ der Winkel ist
Wie rechne ich eine Darstellung in die andere um?

$$\begin{aligned}
& z && = a + bi \\
\Leftrightarrow \quad & z = \mid z \mid && \underbrace{(\underbrace{\frac{a}{\mid z \mid}}_{cos(\phi)} + \underbrace{\frac{b}{\mid z \mid}}_{sin(\phi)} i)}_{\text{hat selben Winkel wie z aber Betrag 1}} \\
\Leftrightarrow \quad & z = \mid z \mid (cos(\phi) + sin(\phi)i) \\
\Leftrightarrow \quad & z = \mid z \mid e^{i\phi}
\end{aligned}$$

Was ist die komplex-konjugierte Zahl einer komplexen Zahl?
Anschaulich ist die komplex-konjugierte Zahl einer komplexen Zahl die Zahl die man erhällt, wenn man an der x-Achse spiegelt. D.h. im besonderen ist

jede reelle Zahl ihre eigene komplex-konjugierte.

$$\begin{aligned} z &= a + bi & &\Rightarrow \overline{z} = a - bi \\ z &= re^{i\phi} & &\Rightarrow \overline{z} = re^{i(-\phi)} = re^{i(2\pi-\phi)} \\ \mid z \mid &= \sqrt{z\overline{z}} \end{aligned}$$

<u>Beispiele für komplexe Zahlen</u>

$$\begin{aligned} 1 &= e^{i2\pi} = e^{i0} = e^0 \\ i &= e^{i\frac{\pi}{2}} \\ -1 &= e^{i\pi} \\ 1 + i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Wie rechnet man mit den komplexen Zahlen

Bei den ersten beiden Schreibweisen ist die Addition einfacher, und die Multiplikation etwas komplizierter. Bei der Polarkoordinatensch. ist es genau umgekehrt.

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)*(c+di) &= ac+adi+bci+dbii = (ac-db)+(ad+bc)i \\ re^{i\phi}*r'e^{i\phi'} &= r*r'*e^{i\phi}*e^{i\phi'} = (r*r')e^{i(\phi*\phi')} \\ z^n &= \underbrace{z*z*...*z}_{\text{n mal}} = re^{i\phi}*re^{i\phi}*...*re^{i\phi} \\ &= r*r*...*r*e^{i\phi}*e^{i\phi}*...*e^{i\phi} = r^n*e^{i(n*\phi)} \\ z^{-1} &= \frac{1}{r}e^{i(2\pi-\phi)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i \end{aligned}$$

Diese Rechenregeln ergeben sich einmal durch einfaches ausmultiplizieren der Klammern und ausklammern von i, bzw. bei der Polarkoordinatenschreibweise durch umstellen des Terms und durch die Potenzgesetze.

Anschaulich ist die Addition relativ klar und die Multiplikation kann man sich so vorstellen: Man nehme zwei komplexe Zahlen miteinander mal indem man die Beträge miteinander mal nimmt und die Winkel addiert. (dadurch sind alle Multiplikationen auf dem Einheitskreis (alle komplexen Zahlen mit Betrag 1) in sich abgeschlossen, d.h eine komplexe Zahl aus dem Einheitskreis mal einer anderen aus dem Einheitskreis liegt auch wieder auf dem Einheitskreis. (speziell die Einheitswurzeln))
<u>Wie finde ich eine Lösung von z.B. $\sqrt[7]{6+8i}$?</u>
(bzw. wie kann ich es in der Form a+bi schreiben?)
Lösungsweg: Wir rechnen erst mal z^7 in Polarkoordinatendarstelllung um

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } z = \sqrt[7]{6+8i} \text{ gegeben} \\
\Rightarrow \quad & z^7 = 6+8i \\
\Rightarrow \quad & \mid z^7 \mid = \sqrt{6^2+8^2} = 10 \\
\Rightarrow \quad & z = 10(0,6+0,8i) \\
& \phi = cos^{-1}(0,6) = sin^{-1}(0,8) \approx 0,9273 = 0,2951\pi
\end{aligned}$$

Jetzt suchen wir die Zahl, die 7 mal mit sich selbst multipliziert den Betrag 10 hat und den Winkel $0,2951\pi$. D.h. wir suchen die Zahl deren Betrag hoch 7 gleich 10 ist und deren Winkel mal 7 gleich$0,2951\pi$ ist. Also einfach 7.Wurzel aus 10 ziehen und den Winkel durch 7 teilen. Damit ergibt sich:

$$z = \sqrt[7]{10}(cos(\frac{0,2951\pi}{7}) + sin(\frac{0,2951\pi}{7})i$$

Nur noch die Zahlen ausrechnen und den Betrag reinmultiplizieren und ihr habt z in der Form a+bi.
<u>Allgemein:</u>

$$z = re^{i\phi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi}{n}}$$