Eine Erinnerung: Um mögliche mengentheoretische Schwierigkeiten zu vermeiden, nennt man 'große Mengen' lieber 'Klassen', man vermeidet auf diese Weise, daß man von der 'Menge aller Mengen' sprechen kann, stattdessen wäre dies die 'Klasse aller Mengen'. 'Mengen' sind 'Klassen', die aus vorgebenen Mengen mit Hilfe von explizit festgehaltenen Mengenbildungsprozessen (Produktmenge, Potenzmenge, usw) induktiv konstruiert worden sind.

Kategorien.

Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ ist gegeben durch

(1) zwei Klassen $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$; die Elemente der Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nennt man *Objekte*, die der Klasse $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ *Morphismen*,

(2) einer Abbildung $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ist $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ dabei das Paar (X, Y) zugeordnet, so schreibt man meist $f\colon X \to Y$ oder auch $f \in \mathcal{C}(X, Y)$; (man schreibt also $\mathcal{C}(X, Y)$ für die Klasse aller Morphismen, die unter der gegebenen Abbildung auf das Paar (X, Y) abgebildet werden) und man setzt (meist) voraus, daß diese Klasse eine Menge ist.

(3) für jedes Tripel X, Y, Z von Objekten ist eine Abbildung $\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$ gegeben, die *Komposition* von Morphismen, sie werde durch $(f, g) \mapsto f \circ g$ für $f \in \mathcal{C}(Y, Z), g \in \mathcal{C}(X, Y)$ bezeichnet;

dabei sollen folgende Axiome erfüllt sein:

(A) (Assoziativität) Sind W, X, Y, Z Objekte, so gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für $f \in \mathcal{C}(Y, Z), g \in \mathcal{C}(X, Y), h \in \mathcal{C}(W, X)$.

(E) (Identische Morphismen): Zu jedem Objekt Y gibt es einen Morphismus $1_Y \in \mathcal{C}(Y, Y)$ mit $1_Y \circ g = g$ für alle $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ und alle Objekte X, und $f \circ 1_Y = f$ für alle $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ und alle Objekte Z.

Beispiele.

(1) Die Kategorie der Gruppen: Objekte sind die Gruppen, Morphismen sind die Gruppen-Homomorphismen.

(2) Die Kategorie der Ringe: Objekte sind die Ringe Morphismen sind die Ring-Homomorphismen.

(3) Die Kategorie der Körper: Objekte sind die Körper, Morphismen sind die Körper-Homomorphismen.

(4) Die Kategorie der k-Vektorräume (dabei sei k ein gewählter Körper): Objekte sind die k-Vektorräume, Morphismen sind die linearen Transformationen.

(5) Die Kategorie der k-Algebren (dabei sei k ein gewählter Körper): Objekte sind die k-Algebren, Morphismen sind die Algebren-Homomorphismen.

(6) Die Kategorie der topologischen Räume: Objekte sind die topologischen Räume, Morphismen sind die stetigen Abbildungen.

(7) Die Kategorie der Mengen: Objekte sind die Mengen, Morphismen sind die (mengentheoretischen) Abbildungen.

Und so weiter.

In allen diesen Kategorien ist die 'Komposition' der Morphismen die übliche Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Wenn man Kategorien erwähnt, thematisiert man meist die Objekte, wie die obigen Beispiele zeigen (zum Beispiel, wenn man von der 'Kategorie der Gruppen' spricht); dies ist aber nur dann erlaubt, wenn unstrittig ist, welche Morphismen gemeint sind (hier eben die Gruppen-Homomorphismen). Mathematisch gesehen sind es gerade die Morphismen, die eigentlich zu betrachten sind; auf die Vorgabe der Objekte könnte man verzichten, da die Morphismen der Form 1_X in Bijektion zu den Objekten stehen! Abgesehen von den mengentheoretischen Besonderheiten sind Kategorie etwas ähnliches wie Halbgruppen; gegeben ist wie bei einer Halbgruppe eine assoziative Multiplikation, die allerdings nur partiell definiert ist .... Eine Kategorie mit genau einem Objekt ist nicht anderes als eine Halbgruppe mit Eins; Kategorien sind also so etwas wie 'Halbgruppen mit mehreren Objekten'.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so erhält man die *entgegengesetzte Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ auf folgende Weise: sie hat die gleichen Objekte, es gilt $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$, und bezeichnen wir die Komposition in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ mit $*$, die in $\mathcal{C}$ wie bisher mit $\circ$, so gilt $f * g = g \circ f$.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so kann man auch die *Morphismenkategorie* $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ in $\mathcal{C}$ bilden: Die Objekte in $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ sind die Morphismen in $\mathcal{C}$, sind zwei derartige Objekte $f\colon X \to Y$ und $f'\colon X' \to Y'$ gegeben, so ist ein Morphismus in $\mathcal{C}^{\rightarrow}(f,f')$ ein Paar (x,y) von Morphismen $x\colon X \to X'$ und $y\colon Y \to Y'$ in $\mathcal{C}$ mit $f' \circ x = y \circ f$; dabei ist die Komposition von $(x,y)\colon f \to f'$ und $(x',y')\colon f' \to f''$ definiert als $(x' \circ x, y' \circ y)$.

Die Kategorientheorie versucht, viele Begriffsbildungen, die sich in allen möglichen Kategorien als wichtig erwiesen haben, ganz allgemein einzuführen, zum Beispiel also von 'Monomorphismen', von 'Epimorphismen' usw in beliebigen Kategorien zu sprechen. Hier ist Vorsicht geboten: ein 'kategorieller Monomorphismus' braucht in einzelnen Beispielkategorien nicht das zu sein, was man eigentlich erwarten würde. Unproblematisch ist allerdings der kategorielle Begriff eines 'Isomorphismus'.

Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Isomorphismus,* wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$.

Funktoren

Kategorien sind also mathematische Objekte, und man kann nun wieder 'struktur-erhaltende Morphismen' von einer Kategorie in eine andere Kategorie betrachten, man nennt sie 'Funktoren'. Die Notwendigkeit, zu präzisieren, was ein 'Funktor' ist, war der Ursprung der Kategorientheorie.

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und jedem Morphismus $f\colon X \to Y$ einen Morphismus $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ zu, so daß gilt:

(1) (Verträglichkeit mit der Komposition) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, für $f \in \mathcal{C}(Y,Z), g \in \mathcal{C}(X,Y)$.

(2) (Verträglichkeit mit identischen Morphismen) Für jedes Object $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Einen Funktor $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ nennt man manchmal einen *kontravarianten Funktor von* $\mathcal{C}$ *nach* $\mathcal{D}$, zur Unterscheidung werden dann Funktoren auch 'kovariante Funktoren' genannt.

Beispiele. Das Arbeiten mit einer Vielzahl von Funktoren ist jedem Mathematiker vertraut, auch wenn dies nicht immer so formuliert wird. Als erstes gibt es vielerlei 'Vergißfunktoren': ordnet man einem Körper $k = (k, +, \cdot)$ die additive Gruppe

$(k, +)$, so erhält man einen Funktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Gruppen; einen zweiten derartigen Funktor erhält man, wenn man k die multiplikative Gruppe $(k \setminus \{0\}, \cdot)$ zuordnet. Viele Konstruktionen in der Mathematik sind 'funktoriell', so, wenn man einem k-Vektorraum V seinen Dualraum V^* zuordnet: dies ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k-Vektorräume in sich. Zu erwähnen ist auch, für jede Kategorie $\mathcal{C}$, der *identische Funktor* $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mit $1_{\mathcal{C}}(X) = X$ für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$, und $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ für jeden Morphismus f in $\mathcal{C}$.

Natürliche Transformationen

Nun kommt das Wichtigste, leider aber etwas, was auf den ersten Blick eher kompliziert zu sein scheint: Der Begiff einer 'natürlichen Transformation': gerade um zu thematisieren, was die mathematische Relevanz von gewissen Abbildungen ist, die man für 'natürlich' hält, wurde die Kategorientheorie entwickelt.

Natürliche Transformationen werden vor allem auch gebraucht, um den Begriff einer 'Äquivalenz von Kategorien' formulieren zu können: Wie oben notiert, sind Kategorien mathematische Objekte, und sobald man weiß, was 'struktur-erhaltende Morphismen' sind, kann man formulieren, wann zwei Kategorien 'isomorph' sind, also die gleiche Struktur haben. Leider gibt es aber in der Natur fast gar keine 'Isomorphismen' von Kategorien; was es gibt, ist etwas (ein wenig) Schwächeres, nämlich 'Äquivalenzen': Betrachtet werden also zwei Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und Funktoren $F\colon \mathcal{C}{\to}\mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D}{\to}\mathcal{D}$. Ist F ein Isomorphismus von Kategorien und G der dazu inverse Isomorphismus, so muß für Objekte $C{\in}\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $D{\in}\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ gelten $GF(X){=}X$, $FG(Y){=}Y$. Nun scheint es im allgemeinen schwierig zu sein, zu einem vorgegebenen Funktor F einen Funktor G zu finden mit $GF(X){=}X$, $FG(Y){=}Y$. Einfacher scheint es zu sein, einen Funktor G zu finden so daß in der Kategorie $\mathcal{C}$ jeweils die Objekte $GF(X)$, X isomorph, und entsprechend in der Kategorie $\mathcal{D}$ die Objekte $FG(Y)$, Y zueinander isomorph sind. Von einer Äquivalenz spricht man aber nur dann, wenn diese Isomorphismen 'natürliche Isomorphismen' sind. Hier nun also die Definition einer 'natürlichen Transformation'.

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, seien $F, F'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\eta\colon F \to G$ ist eine Abbildung, die jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$ zuordnet, so daß für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gilt $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$ (dies ist eine Gleichheit in $\mathcal{D}$). Eine natürliche Transformation $\eta\colon F \to G$ heißt *natürlicher Isomorphismus,* wenn für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Morphismus $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Beispiel 1. Sei $\mathcal{V}$ die Kategorie der k-Vektorräume, sei $B\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ der Funktor, der jedem Vektorraum V den Bidualraum $B(V) = V^{**}$ zuordnet. Für jeden Vektorraum V gibt es eine kanonische Einbettung $\iota_V\colon V \to B(V)$ (unter ι_V wird $v \in V$ auf die Auswertungsabbildung $\iota_V(v)\colon V^* \to k$, mit $\iota_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$ für $\alpha \in V^*$ abgebildet). Die Morphismen ι_V liefern eine natürliche Transformation $1_{\mathcal{V}} \to B$. Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V ist ι_V ein Isomorphismus, dagegen ist ι_V für unendlich dimensionale Vektorräume V zwar injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel 2. Sei $\mathcal{V}$ die Kategorie der Vektorräume, und $\mathcal{V}^{\to}$ die zugehörige Morphismenkategorie. Die Bildung des Kerns einer linearen Transformation ist ein Funktor

$$\mathrm{Ker}\colon \mathcal{V}^{\to} \longrightarrow \mathcal{V},$$

dieser Funktor ordnet jeder linearen Transformation $f\colon V \to W$ den Unterraum $\mathrm{Ker}\, f = \{a \in V \mid f(a) = 0\}$ zu; entsprechend ordnet er jedem Morphismus $(v, w)\colon f \to f'$ in $\mathcal{V}^{\to}$ (also jedem Quadrupel von linearen Transformationen $f\colon V \to W$, $f'\colon V' \to$

W', v: $V \to V'$ und w: $W \to W'$ mit $f' \circ v = w \circ f$) die induzierte Abbildung $\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f'$ zu (dies ist gerade die Einschränkung von v auf $\operatorname{Ker} f$). Neben dem Funktor Ker betrachten wir auch den Funktor

$$\pi_1\colon \mathcal{V}^{\to} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad \pi_1(f\colon V \to W) = V;$$

jedem Morphismus f: $V \to W$ wird hier der Vektorraum, auf dem f definiert ist, zugeordnet, entsprechend wird jedem Morphismus (v, w) in $\mathcal{V}^{\to}$ die erste Komponente v zugeordnet. Die Inklusionabbildungen $\operatorname{Ker}(f\colon V \to W) \to V$ bilden eine natürliche Transformation:

$$\iota\colon \operatorname{Ker} \longrightarrow \pi_1,$$

denn sind lineare Transformationen f: $V \to W$, f': $V' \to W'$, v: $V \to V'$ und w: $W \to W'$ mit $f' \circ v = w \circ f$ gegeben, so gilt

$$v \circ \iota_{(f\colon X \to Y)} = \iota_{(f'\colon X' \to Y')} \circ \operatorname{Ker}(v, w).$$

Äquivalenzen

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz* (oder *natürliche Äquivalenz*), wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen η: $GF \to 1_{\mathcal{C}}$ und η': $FG \to 1_{\mathcal{D}}$ gibt. Eine *Antiäquivalenz* zwischen der Kategorie $\mathcal{C}$ und der Kategorie $\mathcal{D}$ ist definiert als eine Äquivalenz $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Um nachzuweisen, daß ein Homomorphismus f zwischen algebraischen Strukturen ein Isomorphismus ist, genügt es meist zu zeigen, daß f bijektiv ist; dies gilt zum Beispiel für Gruppen-Homomorphismen und für Ring-Homomorphismen. In derartigen Fällen braucht man also nicht die Umkehrabbildung heranzuziehen, sondern es genügt, Eigenschaften von f zu verifizieren, nämlich daß f injektiv und surjektiv ist. Ähnliches soll nun im Fall eines Funktors F geschehen: es soll durch Eigenschaften von F charakterisiert werden, wann F eine Äquivalenz ist.

Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Man nennt F *treu,* wenn für Morphismen f, g: $C \to C'$ in $\mathcal{C}$ aus $F(f) = F(g)$ folgt, daß $f = g$ gilt. Man nennt F *voll*, wenn es für alle Objekte C, C' in $\mathcal{C}$ und jeden Morphismus h: $F(C) \to F(C')$ einen Morphismus f: $C \to C'$ gibt mit $F(f) = h$. Man nennt F *dicht,* wenn es zu jedem Objekt D in $\mathcal{D}$ ein Objekt C in $\mathcal{C}$ und einen Isomorphismus h: $D \to F(C)$ in $\mathcal{D}$ gibt.

Die Begriffe 'treu' und 'voll' beziehen sich also auf die einzelnen Zuordnungen

$$\mathcal{C}(C,C') \longrightarrow \mathcal{D}(F(C),F(C')),$$

die für jedes Paar C,C' von Objekten in $\mathcal{C}$ gegeben ist: verlangt wird daß alle diese Zuordnungen injektiv beziehungsweise surjektiv sind. Die 'Dichtheit' ist eine Art Surjektivitätsaussage für die Klasse der Objekte: in jeder Isomorphieklasse in $\mathcal{D}$ soll es ein Objekt der Form $F(C)$ geben.

Satz. *Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er voll, treu und dicht ist.*