

---

# Seminar “Höhere Lineare Algebra“

## Spiegelungs-Funktoren und Coxeter-Funktoren

Stefanie Hittmeyer und Stefan Höppner  
SS 2006

### Bezeichnungen

Sei  $\Gamma$  ein endlicher verbundener Graph,  $\Gamma_0$  die Menge seiner Knoten und  $\Gamma_1$  die Menge seiner Kanten. Zunächst sind mehrere Kanten pro Knoten, Kreise und Schleifen erlaubt. Bei einigen Sätzen muss man jedoch bestimmte Fälle ausschließen.

Nun fixiert man eine Orientierung  $\Lambda$  des Graphen  $\Gamma$ , d.h. man legt für jede Kante  $l \in \Gamma_1$  einen Anfangspunkt  $\alpha(l) \in \Gamma_0$  und einen Endpunkt  $\beta(l) \in \Gamma_0$  fest.

Sei  $k$  ein Körper. Man ordnet

1. jedem Knoten  $\alpha \in \Gamma_0$  einen endlich dimensionalen  $k$ -Vektorraum zu.
2. jeder Kante  $l \in \Gamma_1$  eine Abbildung  $f_l$  zu mit  $f_l : V_{\alpha(l)} \longrightarrow V_{\beta(l)}$

Setze  $(V, f)$  als die Menge der Vektorräume  $V_\alpha$  ( $\alpha \in \Gamma_0$ ) und der Abbildungen  $f_l$  ( $l \in \Gamma_1$ )

### Definition 1

Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph. Definiere eine Kategorie  $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  durch:

1. Die Objekte sind eine Menge von  $(V, f)$  mit Vektorräumen  $V_\alpha$  ( $\alpha \in \Gamma_0$  und Abbildungen  $f_l$  ( $l \in \Gamma_1$ )
2. Ein Morphismus  $\varphi : (V, f) \longrightarrow (W, g)$  ( $(V, f), (W, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ ) ist die Menge  $\varphi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow W_\alpha \mid \alpha \in \Gamma_0$ , so dass für jede Kante  $l \in \Gamma_1$  das Diagramm

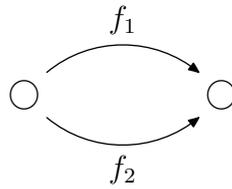
$$\begin{array}{ccc} V_{\alpha(l)} & \xrightarrow{f_l} & V_{\beta(l)} \\ \downarrow \varphi_{\alpha(l)} & & \downarrow \varphi_{\beta(l)} \\ W_{\alpha(l)} & \xrightarrow{g_l} & W_{\beta(l)} \end{array}$$

kommutiert. ( $\varphi_{\beta(l)} \circ f_l = g_l \circ \varphi_{\alpha(l)}$ )

---

## Beispiel 1

Seien  $f_i : V_1 \longrightarrow V_2$  ( $i = 1, 2$ )



## Definition 2

Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph.

1. Seien  $(V, f), (U, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ . Dann heißt  $(W, h)$  mit  $W_\alpha = V_\alpha \oplus U_\alpha$  und  $h_l = f_l \oplus g_l$  *direkte Summe*.
2. Ein Objekt  $0 \neq (V, f) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  heißt *unzerlegbar*, falls es keine Objekte  $0 \neq (U, g), (W, h) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  gibt mit  $(V, f) = (U, g) \oplus (W, h)$ .
3. Ein Objekt  $L_\alpha$  ( $\alpha \in \Gamma_0$ ) heißt *irreduzibel*, falls gilt:  
 $(L_\alpha)_\gamma = 0$  für  $\gamma \neq \alpha$ ,  $(L_\alpha)_\alpha = k$  und  $f_l = 0$  für alle  $l \in \Gamma_1$

## Definition 3

1. Sei  $\alpha \in \Gamma$  ein Knoten von  $\Gamma$ . Dann definiere als  $\Gamma_\alpha$  die Menge der Kanten  $l$ , die  $\alpha$  enthalten, d.h.  $\Gamma_\alpha = \{ l \in \Gamma_1 \mid \alpha = \alpha(l) \text{ oder } \alpha = \beta(l) \}$ .
2. Sei  $\Lambda$  eine Orientierung von  $\Gamma$  und  $\alpha \in \Gamma_0$ . Dann sei  $\sigma_\alpha \Lambda$  die Orientierung von  $\Gamma$ , die aus  $\Lambda$  hervorgeht, wenn man alle Kanten  $l \in \Gamma_\alpha$  umdreht.
3. Sei  $\alpha \in \Gamma_0$ .  $\alpha$  heißt *(-)-zugänglich* (bzw. *(+)-zugänglich*) bzgl.  $\Lambda$ , wenn  $\beta(l) \neq \alpha$  (bzw.  $\alpha(l) \neq \alpha$ )  $\forall l \in \Gamma_1$ .

## Konstruktion der Spiegelungsfunktoren

1. Sei  $\beta$  ein (+)-zug. Knoten des Graphen  $\Gamma$  und der Orientierung  $\Lambda$ . Sei  $(V, f) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ . Wir konstruieren aus dem Objekt  $(V, f)$  ein Objekt  $(W, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$ .

---

(a) Wir setzen  $W_\gamma := V_\gamma$  für  $\gamma \neq \beta$ . Sei  $\Gamma^\beta = \{l_1, \dots, l_k\}$  (dies sind genau die Kanten, die  $\beta$  als Endpunkt haben).

Wir setzen  $W_\beta := \{v = (v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_{\alpha(l_i)}, \sum_{i=1}^k f_{l_i}(v_i) = 0\}$ .

Mit anderen Worten:

Sei  $h: \bigoplus_{i=1}^k V_{\alpha(l_i)} \rightarrow V_\beta$  mit  $h(v_1, \dots, v_k) = f_{l_1}(v_1) + \dots + f_{l_k}(v_k)$ . Dann ist  $W_\beta = \text{Kern}(h)$ .

(b) Setze  $g_l := f_l$  für  $l \notin \Gamma^\beta$ .

Sei nun  $l = l_i \in \Gamma^\beta$ : Definiere  $g_l$  als die Hintereinanderschaltung der natürlichen Einbettung  $W_\beta \rightarrow \bigoplus_{j=1}^k V_{\alpha(l_j)}$  und der Projektion

$$\bigoplus_{j=1}^k V_{\alpha(l_j)} \rightarrow V_{\alpha(l)} (= W_{\alpha(l)}).$$

Dann gilt  $g_l: W_\beta \rightarrow W_{\alpha(l)}$ , also werden beim Übergang von  $f_l$  zu  $g_l$  die Richtungen aller Kanten  $l \in \Gamma^\beta$  geändert. Daraus folgt  $(W, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$ .

Wir bezeichnen das so konstruierte Objekt  $(W, g)$  mit  $F_\beta^+(V, f)$ .

Ein Morphismus  $\varphi = \{\varphi_\gamma\}$  ( $\gamma \in \Gamma_0$ ) wird von  $F_\beta^+$  abgebildet auf:

$$\varphi' : F_\beta^+(V, f) \longrightarrow F_\beta^+(V', f')$$

$$\varphi'_\gamma = \varphi_\gamma \text{ für } \gamma \neq \beta$$

$$\varphi'_\beta = \bigoplus_{i=1}^k \varphi_{\alpha(l_i)} |_{W_\beta} \text{ wobei } l_i \in \Gamma^\beta$$

2. Sei  $\alpha$  ein (-)-zug. Knoten des Graphen  $\Gamma$  und der Orientierung  $\Lambda$ . Sei  $(V, f) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ . Konstruiere daraus ein Objekt  $(W, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$ .

(a) Setze  $W_\gamma := V_\gamma$  für  $\gamma \neq \alpha$ . Sei  $\Gamma^\alpha = \{l_1, \dots, l_k\}$  und  $\tilde{h}: V_\alpha \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k V_{\beta(l_i)}$  mit  $\tilde{h}(v) = (f_{l_1}(v), \dots, f_{l_k}(v))$ .

$$\text{Setze } W_\alpha := \bigoplus_{i=1}^k V_{\beta(l_i)} / \text{Im } \tilde{h} \subseteq \bigoplus_{i=1}^k V_{\beta(l_i)}.$$

(b) Setze  $g_l := f_l$  für  $l \notin \Gamma^\alpha$ .

Für  $l = l_i \in \Gamma^\alpha$  setze  $g_l: W_{\beta(l)} \rightarrow W_\alpha$  als Hintereinanderschaltung der natürlichen Einbettung  $W_{\beta(l)} = V_{\beta(l)} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^k V_{\beta(l_j)}$  und der Projektion  $\bigoplus_{j=1}^k V_{\beta(l_j)} \rightarrow W_\alpha$ .

Also werden beim Übergang von  $f_l$  zu  $g_l$  die Richtung aller Kanten  $l \in \Gamma^\alpha$  geändert und somit gilt  $(W, g) \in \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$ .

Wir bezeichnen das so konstruierte Objekt  $(W, g)$  mit  $F_\alpha^-(V, f)$ .

Ein Morphismus  $\varphi = \{\varphi_\gamma\}$  ( $\gamma \in \Gamma_0$ ) wird von  $F_\alpha^-$  abgebildet auf:

$$\varphi' : F_\alpha^-(V, f) \longrightarrow F_\alpha^-(V', f')$$

$$\varphi'_\gamma = \varphi_\gamma \text{ für } \gamma \neq \alpha$$

$$\varphi'_\alpha = \bigoplus_{i=1}^k \varphi_{\beta(l_i)} |_{W_\alpha} \text{ wobei } l_i \in \Gamma^\alpha$$

Man rechnet leicht nach, dass  $F_\beta^+$  und  $F_\alpha^-$  Funktoren von  $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  nach  $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$  bzw.  $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$  sind. Dabei wird offensichtlich ein Objekt  $(V, f) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  durch  $F_\beta^+$  (bzw.  $F_\alpha^-$ ) auf ein Objekt in  $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$  (bzw.  $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$ ) abgebildet. Zu prüfen ist also, ob ein Morphismus wieder auf einen Morphismus abgebildet wird. Es ist  $F_\beta^+(\varphi_\gamma) = \varphi_\gamma$  für  $\gamma \neq \beta$  und  $F_\alpha^-(\varphi_\gamma) = \varphi_\gamma$  für  $\gamma \neq \alpha$ , deshalb kommutieren die

entsprechenden Diagramme. Es genügt also je Funktor nur das Diagramm auf Kommutativität zu prüfen, das den entsprechenden Knoten enthält. Für (+) - zugängliche Knoten bedeutet dies nachzurechnen, dass das rechte Diagramm kommutiert. (Bezeichnungen wie oben)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 V_{\alpha(l_i)} & \xrightarrow{f_{l_i}} & V_{\beta} \\
 \downarrow \varphi_{\alpha(l_i)} & & \downarrow \varphi_{\beta} \\
 V'_{\alpha(l_i)} & \xrightarrow{f'_{l_i}} & V'_{\beta}
 \end{array} & \xrightarrow{F_{\beta}^+} & \begin{array}{ccc}
 V_{\alpha(l_i)} & \xleftarrow{g_{l_i}} & W_{\beta} \\
 \downarrow \varphi_{\alpha(l_i)} & & \downarrow \varphi'_{\beta} \\
 V'_{\alpha(l_i)} & \xleftarrow{g'_{l_i}} & W'_{\beta}
 \end{array}
 \end{array}$$

Auch für (-) - zugängliche Knoten ist zu zeigen, dass das rechte Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 V_{\alpha} & \xrightarrow{f_{l_i}} & V_{\beta(l_i)} \\
 \downarrow \varphi_{\alpha} & & \downarrow \varphi_{\beta(l_i)} \\
 V'_{\alpha} & \xrightarrow{f'_{l_i}} & V'_{\beta(l_i)}
 \end{array} & \xrightarrow{F_{\beta}^-} & \begin{array}{ccc}
 W_{\alpha} & \xleftarrow{g_{l_i}} & V_{\beta(l_i)} \\
 \downarrow \varphi'_{\alpha} & & \downarrow \varphi_{\beta(l_i)} \\
 W'_{\alpha} & \xleftarrow{g'_{l_i}} & V'_{\beta(l_i)}
 \end{array}
 \end{array}$$

### Satz 1

- Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph und sei  $\beta \in \Gamma_0$  ein Knoten, der unter  $\Lambda$  (+) - zugänglich ist. Sei  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  ein unzerlegbares Objekt. Dann gibt es zwei Fälle:

(a)  $V \cong L_{\beta}$  und  $F_{\beta}^+(V) = 0$

- (b)  $F_{\beta}^+(V)$  ist ein unzerlegbares Objekt,  $F_{\beta}^- F_{\beta}^+(V) = V$  und für  $F_{\beta}^+(V)_{\gamma}$  gilt:

$$\dim F_{\beta}^+(V)_{\gamma} = \dim V_{\gamma} \quad \text{für } \gamma \neq \beta$$

$$\dim F_{\beta}^+(V)_{\beta} = -\dim V_{\beta} + \sum_{l \in \Gamma_{\beta}} \dim V_{\alpha(l)}$$

- Sei  $\alpha \in \Gamma_0$  ein Knoten, der unter  $\Lambda$  (-) - zugänglich ist. Sei  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  ein unzerlegbares Objekt. Dann gibt es zwei Fälle:

(a)  $V \cong L_{\alpha}$  und  $F_{\alpha}^+(V) = 0$

---

(b)  $F_\alpha^+(V)$  ist ein unzerlegbares Objekt,  $F_\alpha^- F_\alpha^+(V) = V$  und für  $F_\alpha^+(V)_\gamma$  gilt:

$$\dim F_\alpha^+(V)_\gamma = \dim V_\gamma \quad \text{für } \gamma \neq \alpha$$

$$\dim F_\alpha^+(V)_\beta = -\dim V_\alpha + \sum_{l \in \Gamma_\alpha} \dim V_{\beta(l)}$$

### Beweis

Sei  $\beta$  (+) - zugänglich unter  $\Lambda$

$\Rightarrow \beta$  ist (-) - zugänglich unter  $\sigma_\beta \Lambda$

$\Rightarrow$  Der Funktor  $F_\beta^- F_\beta^+ : \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  ist definiert.

Nun konstruiert man für jedes Objekt  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  einen Morphismus:

$$i_V^\beta : F_\beta^- F_\beta^+(V) \longrightarrow V$$

mit  $(i_V^\beta)_\gamma = id$ , für  $\gamma \neq \beta$ , denn  $F_\beta^- F_\beta^+(V)_\gamma = V_\gamma$ .

Um  $(i_V^\beta)_\beta$  zu definieren betrachtet man zunächst die Abbildungen:

$$F_\beta^+(V)_\beta \longrightarrow \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)} \longrightarrow V_\beta$$

Es gilt:  $\text{Kern } h = \text{Bild } \tilde{h}$  Dies erkennt man aus der Konstruktion von  $h$  und  $\tilde{h}$   
Setze  $(i_V^\beta)_\beta$  als die (triviale) Einbettung:

$$(i_V^\beta)_\beta : F_\beta^- F_\beta^+(V)_\beta = \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)} / \text{Bild } \tilde{h} = \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)} / \text{Kern } h \longrightarrow V_\beta$$

Man kann nun nachrechnen, dass  $i_V^\beta$  ein Morphismus ist (Axiome prüfen).

Für jeden (-) - zugänglichen Knoten konstruiert man analog einen Morphismus:

$$p_V^\alpha : V \longrightarrow F_\alpha^+ F_\alpha^-(V)$$

Hierbei handelt es sich um die (triviale) Projektion.

### Lemma 1

1.  $F_\alpha^\pm(V_1 \oplus V_2) = F_\alpha^\pm(V_1) \oplus F_\alpha^\pm(V_2)$
2.  $p_V^\alpha$  ist ein Epimorphismus und  $i_V^\beta$  ist ein Monomorphismus.
3. Wenn  $i_V^\beta$  bzw.  $p_V^\alpha$  Isomorphismen sind, gelten obige Dimensionsformeln ( $\rightarrow$  Satz 1).

- 
4. Das Objekt  $Kern p_V^\alpha$  ist konzentriert bei  $\alpha$ , d.h.  $(Kern p_V^\alpha)_\gamma = 0$  für  $\gamma \neq \alpha$ .  
Das Objekt  $V/Bild(i_V^\beta)$  ist konzentriert bei  $\beta$ .
  5. Wenn das Objekt  $V$  die Form  $F_\alpha^+W$  (bzw.  $F_\alpha^-W$ ) hat, ist  $p_V^\alpha$  (bzw.  $i_V^\beta$ ) ein Isomorphismus.
  6. Das Objekt  $V$  ist isomorph zu:  $F_\beta^-F_\beta^+(V) \oplus V/Bild i_V^\beta$  bzw.  $F_\alpha^+F_\alpha^-(V) \oplus Kern p_V^\alpha$

### Beweis

1) bis 4) offensichtlich.

5) nachrechnen und dabei die Definitionen von  $h$  und  $\tilde{h}$  verwenden.

6) zu zeigen:  $V \cong F_\beta^-F_\beta^+(V) \oplus \tilde{V}$ , wobei  $\tilde{V} = V/Bild i_V^\beta$

Die triviale Projektion  $\varphi'_\beta : V_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta$  hat den Schnitt  $\varphi_\beta : \tilde{V}_\beta \rightarrow V_\beta$ .  $\varphi_\beta$  ist hierbei die triviale Einbettung und es gilt:  $(\varphi'_\beta \circ \varphi_\beta = id)$ .

Setze  $\varphi_\gamma = 0$  für  $\gamma \neq \beta$  und erhalte somit einen Morphismus  $\varphi_\beta : \tilde{V}_\beta \rightarrow V_\beta$

$\Rightarrow \varphi_\beta : \tilde{V}_\beta \rightarrow V_\beta$  und  $i_V^\beta : F_\beta^-F_\beta^+(V) \rightarrow (V)$  liefern die behauptete direkte Zerlegung.

Analog zeigt man:  $V \cong F_\alpha^+F_\alpha^-(V) \oplus Kern(P_V^\alpha)$

q.e.d.

### Fortsetzung des Beweises von Satz 1

Sei  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  unzerlegbar,  $\beta \in \Gamma^0 (+)$  - zugänglich.

$\Rightarrow V \cong F_\beta^-F_\beta^+(V) \oplus V/Bild i_V^\beta$  (Lemma 1.6))

Da  $V$  unzerlegbar ist, gibt es nun 2 Fälle:

**1.Fall:**  $V = V/Bild i_V^\beta$

$\Rightarrow V_\gamma = 0$  für  $\gamma \neq \beta$

Da  $V$  unzerlegbar ist, muss gelten:  $V \cong L_\beta$

**2.Fall:**  $V = F_\beta^-F_\beta^+(V)$

$\Rightarrow i_V^\beta$  ist Isomorphismus

$\Rightarrow$  Nach Lemma 1 gelten die Dimensionsformeln.

Zu zeigen:  $W = F_\beta^+(V)$  ist unzerlegbar.

Angenommen  $W$  wäre zerlegbar. Dann gibt es  $W_1, W_2 \neq 0$  mit  $W = W_1 \oplus W_2$

$V = F_\beta^-F_\beta^+(V) = F_\beta^-(W) = F_\beta^-(W_1) \oplus F_\beta^-(W_2)$

$\Rightarrow F_\beta^-(W_1) = 0$  oder  $F_\beta^-(W_2) = 0$ , da  $V$  unzerlegbar ist.

o.B.d.A.  $F_\beta^-(W_2) = 0$

$\Rightarrow V = F_\beta^-(W_1)$

$\Rightarrow W = F_\beta^+(V)$

Nach Lemma 1.5) ist dann  $p_V^\beta : W \rightarrow F_\beta^+F_\beta^-(W)$  ein Isomorphismus.  $\Rightarrow p_V^\beta(W_2) \subseteq F_\beta^+F_\beta^-(W_2) = 0$

---

$\Rightarrow W_2 = 0$

Analog zeigt man den 2. Teil von Satz 1.

## Definition 4

Eine Folge von Knoten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  heißt *(+)-zugänglich* bzgl.  $\Lambda$ , wenn  $\alpha_1$  (+)-zugänglich bzgl.  $\Lambda$ ,  $\alpha_2$  (+)-zugänglich bzgl.  $\sigma_{\alpha_1}\Lambda$ ,  $\alpha_3$  (+)-zugänglich bzgl.  $\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\Lambda$ , usw. Definition einer (-)-zugänglichen Folge analog.

## Korollar

Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  eine (+)-zug. Folge von Knoten. Dann gilt:

1. Für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq k$  ist  $F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^-(L_{\alpha_i})$  entweder 0 oder ein unzerlegbares Objekt in  $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_{\alpha_{i-1}})$  (hier  $L_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_{\alpha_{i-1}} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda)$ ).
2. Sei  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  unzerlegbar und  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+(V)=0$ . Dann existiert ein  $i$  mit  $V \simeq F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^-(L_{\alpha_i})$ .

## Beweis

Beweis durch mehrmaliges Anwenden von Satz 1.1 und Einsetzen.

## Satz 2

Sei  $\Gamma$  ein Graph ohne Kreise, insbes. ohne Schleifen (d.h. wenn  $\alpha \in \Gamma_0$ , dann existiert keine Reihe von Kanten, die  $\alpha$  mit sich selbst verbindet), und seien  $\Lambda, \Lambda'$  Orientierungen von  $\Gamma$ . Dann gilt

i) Es existiert eine (+)-zugängliche Reihe von Knoten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , sodass  $\sigma_{\alpha_k} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda = \Lambda'$ .

ii) Seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  die Mengen der Isomorphieklassen der unzerlegbaren Objekte in  $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  und  $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda')$ . Sei  $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$  bzw.  $\widetilde{\mathcal{M}}' \subset \mathcal{M}'$  die Menge der Klassen der Objekte  $F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^-(L_{\alpha_i})$  bzw.  $F_{\alpha_1}^+ \cdots F_{\alpha_{i-1}}^+(L_{\alpha_i})$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Dann induziert der Funktor  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$  eine Bijektion zwischen  $\mathcal{M} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}$  und  $\mathcal{M}' \setminus \widetilde{\mathcal{M}}'$ .

## Beweis

i) Es reicht, den Fall zu betrachten, dass sich  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  nur in einer Kante  $l$  unterscheiden, denn dann folgt die Behauptung induktiv.

Der Graph  $\Gamma \setminus l$  besteht aus zwei jeweils zusammenhängenden Teilgraphen. Sei  $\Gamma'$  der Teilgraph, der den Knoten  $\beta(l)$  bzgl.  $\Lambda$  enthält. Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  eine Nummerierung der Knoten von  $\Gamma'$ , sodass für jedes  $l' \in \Gamma'_1$  der Index von  $\alpha(l')$  größer ist als der Index von  $\beta(l')$  (so eine Nummerierung existiert, da  $\Gamma$  keine Kreise enthält). Dann ist  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  (+)-zug., denn  $\alpha_1$  ist kein Endpunkt einer Kante bzgl.  $\Lambda$ ,  $\alpha_2$  ist kein Endpunkt einer Kante bzgl.  $\sigma_{\alpha_1}\Lambda$  usw.

Außerdem ist  $\sigma_{\alpha_k} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda = \Lambda$ , denn jede Kante außer  $l$  wird genau zweimal umgedreht.

ii) Aus 1. wissen wir  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+ : \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda) \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma, \sigma_{\alpha_k} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda) = \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda')$  und aus Korollar 2 folgt: Ist  $V \neq F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^-(L_{\alpha_i})$ , so ist  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+(V) \neq 0$ .

Dann folgt mit Satz 1 b), dass  $F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_k}^- F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+(V) = V$  für alle  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  und  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+ F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_k}^-(V) = V$  für alle  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda')$ . Also induziert  $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$  eine Bijektion zwischen  $\mathcal{M} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}$  und  $\mathcal{M}' \setminus \widetilde{\mathcal{M}'}$ .

## Definition 5

Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph ohne orientierte Kreise. Wir nummerieren die Knoten von  $\Gamma$  so, dass für jede Kante  $l \in \Gamma_1$  der Index des Anfangsknotens  $\alpha(l)$  größer als der Index des Endknotens  $\beta(l)$  ist (vgl. Bew. von Satz 2 1.). Dann heißen  $\Phi^+ := F_{\alpha_n}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$  und  $\Phi^- := F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_n}^-$  *Coxeterfunktoren*.

## Lemma 2

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die Knoten in  $\Gamma$  nummeriert wie in Def. 5. Dann gilt:

i) Die Folge  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ist (+)-zug. und die Folge  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$  ist (-)-zug.

ii) Die Funktoren  $\Phi^+$  und  $\Phi^-$  bilden die Kategorie  $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  in sich ab.

iii)  $\Phi^+$  und  $\Phi^-$  hängen nicht von der Wahl der Nummerierung der Knoten ab.

## Beweis

i) Siehe Beweis von Satz 2 1.

ii)  $\sigma_{\alpha_n} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda = \Lambda$  und  $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_n}\Lambda = \Lambda$ , da die Richtung jeder Kante genau zweimal geändert wird.

iii) Es gilt: Sind zwei (+)-zug. Knoten  $\gamma_1, \gamma_2$  nicht durch eine Kante verbunden, so kommutieren die Funktoren  $F_{\gamma_1}$  und  $F_{\gamma_2}$ .

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  zwei Nummerierungen der Knoten von  $\Gamma$  wie in Def. 5. Es ist  $\alpha_1 = \alpha'_m$  für ein  $m$  mit  $1 \leq m \leq n$ . Dann sind die Knoten  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}$  nicht mit  $\alpha_1$  durch eine Kante verbunden (sonst Widerspruch zur Nummerierung

---

nach Def. 5).

Daraus folgt  $F_{\alpha'_m}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ = F_{\alpha'_{m-1}}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ F_{\alpha'_m}^+ = F_{\alpha'_{m-1}}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ F_{\alpha_1}^+$ . Fahre so fort mit  $\alpha_2, \alpha_3$  usw. Dann folgt  $F_{\alpha'_n}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ = F_{\alpha_n}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+ = \Phi^+$ . Also hängt  $\Phi^+$  nicht von der Wahl der Nummerierung der Knoten ab.

Beweis für  $\Phi^-$  analog.

## Definition 6

Sei  $(\Gamma, \Lambda)$  ein orientierter Graph ohne orientierte Kreise.

1. Ein Objekt  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  heißt *(+) - irregulär* (bzw. *(-) - irregulär*), falls  $(\Phi^+)^j(V) = 0$  (bzw.  $(\Phi^-)^j(V) = 0$ ) für ein  $j \in \mathbb{N}$
2. Ein Objekt  $V$  heißt *regulär*, falls:  $V \cong (\Phi^-)^j(\Phi^+)^j(V) \cong (\Phi^+)^j(\Phi^-)^j(V) \quad \forall j \in \mathbb{N}$

## Satz 3

1. Jedes unzerlegbare Objekt  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  ist entweder regulär oder irregulär.
2. Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine Nummerierung der Knoten von  $\Gamma$ , so dass für jede Kante  $l \in \Gamma_1$  der Index von  $\alpha(l)$  größer ist als der von  $\beta(l)$ . Setze
 
$$V_i = F_{\alpha_1}^- F_{\alpha_2}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^- (L_{\alpha_i}^-) \in L(\Gamma, \Lambda)$$

$$\hat{V}_i = F_{\alpha_n}^+ F_{\alpha_{n-1}}^+ \cdots F_{\alpha_{i+1}}^+ \in L(\Gamma, \Lambda) \quad (1 \leq i \leq n)$$
 Dann ist  $\Phi^+(V_i) = 0$  und jedes unzerlegbare Objekt  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  mit  $\Phi^+(V_i) = 0$  ist isomorph zu einem Objekt  $V_i$ .  
 Analog gilt:  $\Phi^-(\hat{V}_i) = 0$  und jedes unzerlegbare Objekt  $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$  mit  $\Phi^-(\hat{V}_i) = 0$  ist isomorph zu einem Objekt  $\hat{V}_i$ .
3. Jedes *(+) (bzw. (-)) - irreguläre* Objekt hat die Form  $(\phi^-)^k(V_i)$  (bzw.  $(\phi^-)^k(\hat{V}_i)$ ) für ein  $1 \leq i \leq n$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ .