Seminarvortrag über Ext

Alexandra Bartsch und Björn Hoffmann

Dieser Vortrag soll eine Einführung ist die Menge *Ext* geben. Es werden die Definitionen einer *Erweiterung* und der Ext gegeben. Dann soll es unser Ziel sein, eine Gruppenstruktur auf Ext zu definieren. Wir konstruieren eine Addition, die sogenannte *Baer-Summe* und werden am Schluss den Beweis liefern, dass Ext bzgl. der Baer-Summe eine abelsche Gruppe ist.

1 Einführung

Sei R ein kommutativer Ring.

Definition (Modul)**.**
Sei $R = (R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $M = (M, +)$ eine abelsche Gruppe. M ist zusammen mit der Abbildung

$$R \times M \to R,\ (r, m) \mapsto r \cdot m$$

ein *Modul über R*, falls folgende Punkte für $r, r_1, r_2 \in R, m, m_1, m_2 \in M$ erfüllt sind:

(M1) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2) \cdot m$

(M2) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$

(M3) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$

Ist $1 \cdot m = m$ so heißt M *unitärer Modul.*

Beispiel.
Jeder K-Vektorraum ist ein Modul über K.

Definition (Kurze exakte Sequenz)**.**
Seien M, M', M'' Moduln über R. Eine Folge

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

heißt *exakt* an der Stelle M, falls

$$\text{Kern}(\psi) = \text{Bild}(\varphi)$$

Definition (Erweiterung)**.**
Seien A und C Moduln über einem Ring R. Eine *Erweiterung von A durch C* ist eine Sequenz der Form

$$E = (\kappa, \sigma) : \quad 0 \to A \xrightarrow{\kappa} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

die an jeder Stelle exakt ist.

Bemerkung.
Ist $E = (\kappa, \sigma)$ eine Erweiterung, so ist κ injektiv und σ surjektiv.

Beispiel.
Sei $\mathbb{Z}$ der Modul über sich selber. Dann ist

$$E = (\kappa, \sigma): \quad 0 \to n\mathbb{Z} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

eine Erweiterung von $n\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wobei κ die natürliche Inklusion und σ die Restklassenbildung ist.

Definition (Morphismus von Erweiterungen)**.**
Ein Morphismus von Erweiterungen ist ein Tripel $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ von Modulhomomorphismen, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
E_f & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\kappa'"'] & B' \arrow[r, "\sigma'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $A = A'$ und $C = C'$, so heißen zwei Erweiterungen *isomorph*, falls es einen Morphismus $\Gamma = (1_A, \beta, 1_C): E \to E'$ gibt.

Bemerkung.
Die Bezeichnung *isomorph* macht tatsächlich Sinn, denn nach dem folgenden Five Lemma ist β dann ein Modulisomorphimus.

Lemma 1.1 (Five Lemma)**.**
Sei $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ ein Morphismus von Erweiterungen. Ist obiges Diagramm kommutativ dann gilt:

(i) Sind α und γ Isomorphismen, so auch β.

(ii) Sind α und γ injektiv, so auch β.

(iii) Sind α und γ surjektiv, so auch β.

Beweis.
Es reicht (ii) und (iii) zu zeigen:

(ii) Sei $b \in Kern(\beta)$. Da das Diagramm kommutiert, gilt:

$$\gamma\sigma(b) = \sigma'\beta(b) = 0$$

Nun ist γ injektiv, also $\sigma(b) = 0$. Da $b \in Kern(\sigma) = Bild(\kappa)$, gibt es ein $a \in A$, so dass $\kappa(a) = b$. Wegen der Kommutativität des Diagramms gilt nun:

$$\kappa'\alpha(a) = \beta\kappa(a) = \beta(b) = 0$$

Da κ' injektiv ist, ist $\alpha(a) = 0$. Dann ist aber $a = 0$, weil auch α injektiv ist. Also $b = \kappa(a) = 0$. Damit folgt die Behauptung.

(iii) Sei $b' \in B'$. Da γ surjektiv ist und das Diagramm kommutiert, gibt es ein $c \in C$, so dass $\gamma(c) = \sigma'(b')$. Weil σ surjektiv ist, finden wir ein $b \in B$ mit $\sigma(b) = c$. Dann gilt:

$$\sigma'(b') = \gamma\sigma(b) \Leftrightarrow \sigma'\beta(b) = \sigma'(b') \Leftrightarrow \sigma'(\beta(b) - b') = 0$$

Damit gibt es dann ein $a' \in A'$ mit $\kappa'(a') = \beta(b) - b'$. Nun ist auch α surjektiv, also gibt es ein $a \in A$ mit $\alpha(a) = a'$. Dann ist:

$$\beta\kappa(a) = \kappa'\alpha(a) = \beta(b) - b' \Leftrightarrow b' = \beta(b - \kappa(a))$$

Damit haben wir ein Urbild gefunden und β ist surjektiv.

$\square$

Wir nennen nun zwei Erweiterungen *kongruent*, falls sie isomorph im obigen Sinne sind. Dies liefert uns eine Äquivalenzrelation, und wir definieren nun:

Definition (Ext)**.**
Sind C, A Moduln über R, so sei $Ext_R(C, A)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Erweiterungen von A durch C.

Definition.
Eine Erweiterung E heißt *gespalten*, falls sie kongruent zu der folgenden Erweiterung ist:

$$0 \to A \xrightarrow{\kappa} A \oplus C \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

wobei κ die Abbildung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und σ die Projektion auf die zweite Koordinate ist.

Bemerkung.
Äquivalent dazu ist, dass

$$0 \to A \to B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

eine Erweiterung ist, wobei σ ein Rechtsinverses hat, d.h. es gibt eine Abbildung $\mu : C \to B$ mit $\sigma\mu = 1$.

Beispiel.
Ist E eine Erweiterung durch einen projektiven Modul P, so ist sie kongruent zu der gespaltenen Erweiterung. Dies sieht man an folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl] \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Für Vektorräume besteht die Menge $Ext_R(C, A)$ also nur aus einem Element (dem Nullelement), denn jeder Vektorraum ist *frei*, d.h., er ist isomorph zu einer direkten Summe des Grundkörpers, und damit auch projektiv.

2 Die Gruppenstruktur auf Ext

Nun haben wir die Menge $Ext_R(C, A)$ kennen gelernt. Wir wollen nun eine Gruppenstruktur auf $Ext_R(C, A)$ definieren.

Definition (pullback)**.**
Seien $\varphi : A \to X$, $\psi : B \to X$ Modulhomomorphismen. Ein *pullback von* (φ, ψ) ist ein Paar von Modulhomomorphismen $\alpha : Y \to A$, $\beta : Y \to B$, so dass $\varphi\alpha = \psi\beta$ und folgende universelle Eigenschaft gilt:
Sind $\gamma : Z \to A$, $\delta : Z \to B$ zwei weitere Homomorphismen mit $\varphi\gamma = \psi\delta$, so gibt es genau einen Homomorphismus $\zeta : Z \to Y$ mit $\gamma = \alpha\zeta$, $\delta = \beta\zeta$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\zeta"] \arrow[drr, bend left, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\psi"] \\
& A \arrow[r, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.1.
Ist $E \in Ext_R(C, A)$ eine Erweiterung und ist $f : C' \to C$ ein Modulhomomorphismus, dann gibt es eine Erweiterung $E_f \in Ext_R(C', A)$ und einen Morphismus $\Gamma = (1, h, f) : E_f \to E$, so dass (h, σ') ein pullback von (σ, f) ist.

$$\begin{tikzcd}
E & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \arrow[r] & 0 \\
E_f \arrow[u, "\Gamma"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[u, equal] \arrow[r, dashed, "\kappa'"'] \arrow[rr, bend right, "0"'] & B' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\sigma'"'] & C' \arrow[u, "f"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis.
Betrachte folgende Abbildungen:

$$\alpha : B \oplus C' \overset{h:=p_1}{\to} B \xrightarrow{\sigma} C$$

$$\beta : B \oplus C' \overset{\sigma':=p_2}{\to} C' \xrightarrow{f} C$$

Setze $B' := Kern(\alpha - \beta) \subsetneqq B \oplus C'$. Dann ist $h : B' \to B$, $\sigma' : B' \to C'$ ein pullback von (σ, f), denn:
Es ist zu zeigen, dass $\sigma h = f\sigma'$. Sei $(x, y) \in B'$. Dann ist

$$\alpha(x, y) = \beta(x, y) \Leftrightarrow \sigma(x) = f(y)$$

Also:

$$\sigma h(x,y) = \sigma(x) = f(y) = f\sigma'(x,y)$$

Universelle Eigenschaft:
Setze $\kappa' : A \to B',\ a \mapsto (\kappa(a), 0)$. *Dann gilt*

$$h\kappa'(a) = h(\kappa(a), 0) = \kappa(a),\ 0 = \sigma'\kappa'(a) = \sigma'(\kappa(a), 0) = 0$$

und κ' *ist nach Konstruktion eindeutig.* □

Bemerkung.
$E_f \in Ext_R(C', A)$

Beweis.
Es ist zu zeigen;

(i) κ' *ist injektiv.*

(ii) σ' *ist surjektiv.*

(iii) *Bild(*κ'*)=Kern(*σ'*)*

Zu (i):
Sei $x \in Kern(\kappa')$. *Dann ist*

$$0 = h(\kappa'(x)) = \kappa(x) \overset{\kappa \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = 0$$

Zu (ii):
Sei $y \in C'$. *Dann ist* $f(y) \in C$ *und da* σ *surjektiv ist, gibt es ein* $x \in B$ *mit* $\sigma(x) = f(y)$. *Somit ist nach dem Beweis von Lemma 2.1* $(x,y) \in B'$ *und Urbild von* y *unter* σ'.
Zu(iii):
Klar!

□

Lemma 2.2.
Seien $E_1, E_2 \in Ext_R(C, A)$ *mit* $E_1 \equiv E_2$. *Dann ist* $E_{1f} \equiv E_{2f}$

Beweis.
Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & E_{1f} & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "\tilde\kappa"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] & & \tilde B \arrow[rr, "\tilde\sigma"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, dashed, red, "\beta"] & & C' \arrow[rr] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, equal] & & 0 \\
E_1 & 0 \arrow[rrr] & & & A \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dd, equal] & & B \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dd, "\varphi"] & & C \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & 0 & \\
 & & E_{2f} & 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "\tilde\kappa'"] \arrow[dl, equal] & & \tilde B' \arrow[rr, "\tilde\sigma'"] \arrow[dl, "h"] & & C' \arrow[rr] \arrow[dl, "f"] & & 0 \\
E_2 & 0 \arrow[rrr] & & & A \arrow[rr, "\kappa'"] & & B' \arrow[rr, "\sigma'"'] & & C \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Gesucht ist ein Isomorphismus β. Es reicht zu zeigen, dass $\beta : \tilde{B} \to \tilde{B}'$ existiert und dass folgende Diagramme kommutieren:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[d, equal] & \tilde{B} \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "\tilde{\kappa}'"'] & \tilde{B}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{B} \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "\beta"'] & C' \arrow[d, equal] \\
\tilde{B}' \arrow[r, "\tilde{\sigma}'"'] & C'
\end{tikzcd}
$$

Zur Existenz von β betrachte nun folgendes pullback Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{B} \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\sigma}"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi g"'] & & \\
& \tilde{B}' \arrow[r, "\tilde{\sigma}'"] \arrow[d, "h"] & C' \arrow[d, "f"] \\
& B' \arrow[r, "\tilde{\sigma}"'] & C
\end{tikzcd}
$$

β existiert, wenn das große Diagramm kommutiert. Es gilt aber:

$$f\tilde{\sigma} = \sigma g = \sigma' \varphi g$$

Damit ist die Existenz von β gezeigt.
Warum kommutieren nun die obigen Diagramme?
Das 2. Diagramm kommutiert, weil es eben das obere, kleine Diagramm ist.
Damit das 1. Diagramm kommutiert muss gelten:

$$\tilde{\kappa}' = \beta\tilde{\kappa}$$

Betrachte dazu folgendes:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "\beta\tilde{\kappa}"] \arrow[dr, bend right, "\tilde{\kappa}'"'] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\sigma}\tilde{\kappa}"] \arrow[ddr, bend right, "\kappa'"'] & & \\
& \tilde{B}' \arrow[r, "\tilde{\sigma}'"] \arrow[d, "h"] & C' \arrow[d, "f"] \\
& B' \arrow[r, "\sigma'"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Kommutieren nun die kleinen Diagramme bzgl. $\tilde{\kappa'}$ und $\beta \circ \tilde{\kappa}$, so müssen diese wegen der Eindeutigkeitsaussage des pullback gleich sein. Es gilt aber:

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}'\tilde{\kappa}' = 0 = \tilde{\sigma}\tilde{\kappa} \\ \tilde{\sigma}'\beta\tilde{\kappa}' = \tilde{\sigma}\tilde{\kappa} \\ h\tilde{\kappa}' = \kappa' \\ h\beta\tilde{\kappa} = \varphi g\tilde{\kappa} = \varphi\kappa = \kappa'\end{gathered}$$

Insgesamt haben wir also gesehen, dass die beiden Diagramme kommutieren, und nach dem Five Lemma ist β ein Isomorphismus.

$\square$

Korollar 2.1.
Die Erweiterung E_f aus Lemma 2.1 ist bis auf Kongruenz eindeutig.

Lemma 2.3.
Unter den Vorraussetzungen von Lemma 2.1, kann man jeden Morphismus $\Gamma_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma) : E_1 \to E$ als Komposition der folgenden schreiben:

$$E_1 \xrightarrow{\Gamma_2} E_\gamma \xrightarrow{\Gamma} E$$

wobei $\Gamma_2 = (\alpha_1, \beta', 1) : E_1 \to E_\gamma$ und $\Gamma = (1, \beta, \gamma) : E_\gamma \to E$. Hierbei ist Γ eindeutig.

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "\Gamma_2"] & 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\beta'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E_\gamma \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
E & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definiere $\beta' : B_1 \to B'$, $b_1 \mapsto (\beta_1(b_1), \sigma_1(b_1))$. Dann gilt $\beta_1 = \beta\beta'$ und es gilt: $\sigma'\beta' = \sigma_1$, dass obere Diagramm kommutiert also. Nun ist aber klar, dass uns β' dann obige Faktorisierung von Γ_1 liefert.
Die Eindeutigkeit liefert uns Lemma 2.1 zusammen mit Korollar 2.1, denn ist $\Gamma'' = (1, \beta'', \gamma) : E'' \to E$ ein weiterer Morphismus, so können wir diesen wie folgt faktorisieren:

$$(1, \beta'', \gamma) = (1, \beta, \gamma)(1, \tilde{\beta}, 1)$$

wobei $(1, \tilde{\beta}, 1) : E'' \to E_\gamma$. Dazu betrachte man folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[ddd] & 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[ddd] & B_1 \arrow[r] \arrow[ddd] & C' \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
\\
\\
E'' \arrow[ddd, "{(1,\tilde{\beta},1)}"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & \tilde{B}' \arrow[r] \arrow[ddd, "\tilde{\beta}"] & C' \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & 0 \\
\\
\\
E_\gamma \arrow[ddd, "{(1,\beta,\gamma)}"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[ddd, equal] & B' \arrow[r] \arrow[ddd, "\beta"] & C' \arrow[r] \arrow[ddd, "\gamma"] & 0 \\
\\
\\
E & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Das bedeutet aber, dass $E'' \equiv E_\gamma$.

$\square$

Definition (pushout)**.**
Seien $\varphi : X \to A,\ \psi : X \to B$ Modulhomomorphismen. Ein *pushout von* (φ, ψ) ist ein Paar von Modulhomomorphismen $\alpha : A \to Y,\ \beta : B \to Y$, so dass $\alpha\varphi = \beta\psi$ und folgende universelle Eigenschaft gilt:
Sind $\gamma : A \to Z,\ \delta : B \to Z$ weitere Homomorphismen mit $\gamma\varphi = \delta\psi$, so gibt es genau ein $\zeta : Y \to Z$ mit $\gamma = \zeta\alpha,\ \delta = \zeta\beta$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, bend left, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[rr, bend right, "\delta"'] & Y \arrow[r, dashed, "\zeta"] & Z
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung.
Jeder pushout ist ein pullback in der oppositären Kategorie. Also gelten alle obigen Aussagen in entsprechender Weise für ein pushout.

Wir wollen der Vollständigkeit die obigen Aussagen nocheinmal für ein pushout formulieren (ohne Beweis):

Lemma 2.4.
Ist $E \in Ext_R(C, A)$ eine Erweiterung und ist $g : A \to A'$ ein Modulhomomorphismus, dann gibt es eine Erweiterung $E^g \in Ext_R(C, A')$, einen Morphismus $\Gamma = (g, h, 1) : E \to E^g$ und (h, κ') ist ein pushout von (κ, g). E^g ist bis auf Kongruenz eindeutig.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E^g & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\kappa'"] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis.

□

Bemerkung.
Im Beweis von Lemma 2.1 konstruieren wir B' als den Kern der oben genannten Abbildungen. Hier ist B' nicht der Kern, sondern der Cokern der entsprechenden Abbildungen, und h, κ sind die natürlichen Inklusionen.

Lemma 2.5.
Unter den Vorraussetzungen von Lemma 2.4, kann man jeden Morphismus $\Gamma_1 = (\alpha, \beta_1, \gamma_1) : E \to E_1$ als Komposition der folgenden schreiben:

$$E \xrightarrow{\Gamma} E^\gamma \xrightarrow{\Gamma_2} E_1$$

wobei $\Gamma = (\alpha, \beta, 1) : E \to E^\gamma$ und $\Gamma = (1, \beta', \gamma_1) : E^\gamma \to E_1$. Hierbei ist Γ eindeutig.

Beweis.

□

Zusammengefasst: Ist $f : C' \to C$ ein Modulhomomorphismus und $E \in Ext_R(C, A)$, so bezeichnen wir mit E_f die exakte Sequenz, welche mittels pullback aus E entsteht. Analog bezeichnen wir mit E^g die exakte Sequenz, welche aus E mittels pushout für $g : A \to A'$ entsteht.
Wir wollen nun eine Addition definieren, so dass $Ext_R(C, A)$ eine abelsche Gruppe wird. Dazu noch ein paar Vorbereitungen:

Proposition 2.1.
Es gilt für $E \in Ext_R(C, A)$:

(i) $E_{1_C} \equiv E$

(ii) $E^{1_A} \equiv E$

(iii) $E_{fg} \equiv (E_f)_g$

(iv) $E^{f'g'} \equiv (E^{g'})^{f'}$

wobei $g : C'' \to C',\ f : C' \to C$ und $g' : A \to A',\ f' : A' \to A''$ Modulhomomorphismen sind.

Beweis.
Wir zeigen nur (i) und (iii). Die beiden anderen Aussagen werden analog bewiesen.

(i)

$$\begin{tikzcd}
E & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
E_{1_C} & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & B' \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Da beide Quadrate kommutieren, ist φ nach dem Five Lemma ein Isomorphismus. Also $E \equiv E_{1_C}$.

(iii)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[u, equal] & B' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[u, "\psi"] & C' \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa''"] \arrow[u, equal] \arrow[rr, bend right, "0"'] & B'' \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[u, "\varphi"] & C'' \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist zu zeigen, dass $\psi \circ \varphi$, σ'' pullback von $(\sigma, f \circ g)$ ist. Dies ist aber leicht zu sehen, denn wir bekommen eine Abbildung κ' von A nach B' mittels des ersten pullbacks und dann eine Abbildung κ'' wegen des zweiten pullbacks. Beide Abbildungen sind eindeutig wegen der pullback Eigenschaft und alle Diagramme kommutieren.

□

Proposition 2.2.
Jeder Morphismus $\Gamma_1 = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ von Erweiterungen impliziert eine Kongruenz $E^\alpha \equiv E'_\gamma$.

Beweis.
Nach Lemma 2.5 können wir Γ_1 wie folgt faktorisieren: $\Gamma_1 = \Gamma_2 \Gamma$ mit $\Gamma : E \mapsto E^\alpha$ und $\Gamma_2 : E^\alpha \mapsto E'$. Nun ist Γ_2 aber von der Form Γ in Lemma 2.1. Wegen der Eindeutigkeit muss dann gelten: $E^\alpha \equiv E'_\gamma$.

□

Seien $E_1, E_2 \in Ext_R(C, A)$, etwa

$$0 \to A \overset{f_1}{\to} B \overset{g_1}{\to} C \to 0 \qquad\qquad 0 \to A \overset{f_2}{\to} B \overset{g_2}{\to} C \to 0$$

Unter $E_1 \oplus E_2$ versteht man folgende Erweiterung in $Ext_R(C \oplus C, A \oplus A)$:

$$E_1 \oplus E_2 : \ 0 \to A \oplus A \overset{\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} B_1 \oplus B_2 \overset{\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}}{\longrightarrow} C \oplus C \to 0$$

Korollar 2.2.
Für $E \in Ext_R(C, A)$ und die Abbildungen
$g_A : A \oplus A \to A, \ (a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2,$
$g_C : C \oplus C \to C, \ (c_1, c_2) \mapsto c_1 + c_2,$
$f_A : A \to A \oplus A, \ a \mapsto (a, a),$
$f_C : C \to C \oplus C, \ c \mapsto (c, c)$
gilt:

(i) $(E \oplus E)_{f_C} \equiv E^{f_A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f_A"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, equal] \\
A \oplus A \arrow[r] & B' \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \oplus B \arrow[r] & C \oplus C \\
A \oplus A \arrow[r] & B'' \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u, "f_C"']
\end{tikzcd}$$

(ii) $E_{g_C} \equiv (E \oplus E)^{g_A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] & C \\
A \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[u] & C \oplus C \arrow[u, "g_C"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r] \arrow[d, "g_A"] & B \oplus B \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r] & B'' \arrow[r] & C \oplus C
\end{tikzcd}$$

Beweis.
Anwenden von Proposition 2.2.

$\square$

Lemma 2.6.
Für $E \in Ext_R(C, A)$ und $g : \ A \to A', \ f : \ C' \to C$ gilt:

$$(E^g)_f \equiv (E_f)^g$$

Bemerkung.
Das Lemma besagt, dass es bei einer Hintereinanderschaltung von pullback und pushout völlig egal ist, ob man zuerst den pullback und dann den pushout durchführt oder anders herum. Die Hintereinanderschaltung dieser beiden Abbildungen wird später sehr wichtig.

Beweis.
Betrachte folgendes Diagramm, der Einfachheit halber sind die Nullen weggelassen:

$$
\begin{tikzcd}
E_f & & A \arrow[rr, "\tilde{\kappa}"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "g"] & & \tilde{B} \arrow[rr, "\tilde{\sigma}"] \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dd, "h"] & & C' \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, equal] \\
E & A \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dd, "g"'] & & B \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & C \arrow[dd, equal] & \\
(E_f)^g & & A' \arrow[rr, "\tilde{\kappa}'"] \arrow[dl, equal] & & \tilde{B}' \arrow[rr, "\tilde{\sigma}'"] \arrow[dl, dashed, red, "\beta'"'] \arrow[ddl, dashed, red, "\beta"] & & C' \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, equal] \\
E^g & A' \arrow[rr, "\kappa'"'] \arrow[d, equal] & & B' \arrow[rr, "\sigma'"'] & & C & \\
(E^g)_f & A' \arrow[rr] & & B'' \arrow[rr, "\sigma''"'] \arrow[u] & & C' \arrow[u, "f"] &
\end{tikzcd}
$$

Ziel ist es eine Abbildung $\beta : \tilde{B}' \to B''$ zu finden, die ein Isomorphismus ist. Wir suchen zunächst eine Abbildung $\beta' : \tilde{B}' \to B'$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[d, "g"'] & \tilde{B} \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha\varphi"] & \\
A' \arrow[r, "\tilde{\kappa}'"'] \arrow[drr, bend right, "\kappa'"'] & \tilde{B}' \arrow[dr, dashed, "\beta'"] & \\
& & B'
\end{tikzcd}
$$

Das β' existiert folgt aus der universellen Eigenschaft des obigen pushouts, da dass äußere Diagramm kommutiert:

$$\alpha\varphi\tilde{\kappa} = \alpha\kappa = \kappa' g$$

Nun wollen wir folgendes Diagramm untersuchen:

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{B}' \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\sigma}'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& B'' \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[d] & C' \arrow[d, "f"] \\
& B' \arrow[r, "\sigma'"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Damit β existiert muß gelten:

$$\sigma'\beta' = f\tilde{\sigma}' \qquad (*)$$

Dazu betrachte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[d, "g"'] & \tilde{B} \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "f\tilde{\sigma}"] & \\
A' \arrow[r, "\tilde{\kappa}'"'] \arrow[drr, bend right, "\sigma'\kappa'"'] & \tilde{B}' \arrow[dr, bend left, "\sigma'\beta'"] \arrow[dr, bend right, "f\tilde{\sigma}'"'] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

Wie oben schon einmal gesehen gilt $(*)$, wenn die inneren Diagramme bzgl $\sigma'\beta$ und $f\tilde{\sigma}$ kommutieren. Nun gilt aber:

$$\begin{gathered}
\sigma'\beta h = \sigma'\alpha\varphi = \sigma\varphi = f\tilde{\sigma} \\
f\tilde{\sigma}' h = f\tilde{\sigma} \\
\sigma'\kappa' = 0 = f\tilde{\sigma}'\tilde{\kappa}' \\
\sigma'\kappa' = \sigma'\beta\tilde{\kappa}'
\end{gathered}$$

Damit folgt $(*)$.
Dann ist β nach dem Five Lemma ein Isomorphismus, da die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\tilde{\kappa}'"] \arrow[d, equal] & \tilde{B}' \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "\tilde{\kappa}'"'] & B''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{B}' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "\beta"'] & C' \arrow[d, equal] \\
B'' \arrow[r, "\tilde{\sigma}''"'] & C'
\end{tikzcd}$$

□

Nun wollen wir die *Baer Summe* definieren.

Definition.
Sei $f^* : C \to C \oplus C,\ c \mapsto (c, c)$ und $g^* : A \oplus A \to A,\ (a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2$. Weiter seien

$$\begin{aligned}
E_1 \quad &: \ 0 \to A \to B_1 \to C \to 0 \\
E_2 \quad &: \ 0 \to A \to B_2 \to C \to 0
\end{aligned}$$

zwei Erweiterungen aus $Ext_R(C, A)$. Definiere nun

$$[E_1] + [E_2] := [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*} = [(E_1 \oplus E_2)^{g^*}]_{f^*}$$

in $Ext_R(C, A)$. Diese Summe heißt *Baer Summe*.

Lemma 2.7.
Für $E_1, E_2 \in Ext_R(C, A)$ gilt:

$$(E_1 \oplus E_2)^{\alpha_1 \oplus \alpha_2} \equiv E_1^{\alpha_1} \oplus E_2^{\alpha_2}$$

Hierbei sind $\alpha_i : A_i \to A'_i$ Modulhomomorphismen.

Beweis.
Betrachte folgende Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[d, equal] \\
A'_1 \arrow[r] & B'_1 \arrow[r] & C_1 & A'_2 \arrow[r] & B'_2 \arrow[r] & C_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \oplus A_2 \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha_1 \oplus \alpha_2)"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \oplus C_2 \arrow[d, equal] \\
A'_1 \oplus A'_2 \arrow[r] & B'_1 \oplus B'_2 \arrow[r] & C_1 \oplus C_2
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.8.
Für $E, E_1, E_2 \in Ext_R(C, A)$ gilt:

(i) $(E_1 + E_2)^\alpha \equiv E_1^\alpha + E_2^\alpha$

(ii) $E^{\alpha_1 + \alpha_2} \equiv E^{\alpha_1} + E^{\alpha_2}$

(iii) $(E_1 + E_2)_\gamma \equiv E_{1\gamma} + E_{2\gamma}$

(iv) $E_{\gamma_1 + \gamma_2} \equiv E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$

wobei $\alpha : A \to A'$, $\alpha_i : A \to A_i$ und $\gamma : C' \to C$, $\gamma_i : C_i \to C$ Modulhomomorphismen sind.

Beweis.
Wir werden nur (i) und (ii) zeigen. Die anderen beiden werden analog bewiesen.

(i)

$$\begin{aligned}
(E_1 + E_2)^\alpha &\overset{Def.}{\equiv} ([(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*})^\alpha \\
&\overset{Prop.2.1(iv)}{\equiv} [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{\alpha g^*} \\
&\equiv [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*(\alpha \oplus \alpha)} \\
&\overset{Prop.2.1(iv)}{\equiv} ([(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{(\alpha \oplus \alpha)})^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.6}{\equiv} ([(E_1 \oplus E_2)^{(\alpha \oplus \alpha)}]_{f^*})^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} ([(E_1)^\alpha \oplus (E_2)^\alpha]_{f^*})^{g^*} \\
&\equiv E_1^\alpha + E_2^\alpha
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
E^{\alpha_1} + E^{\alpha_2} &\overset{Def.}{\equiv} ([(E)^{\alpha_1} \oplus (E)^{\alpha_2}]_{f^*})^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} ([(E \oplus E)^{(\alpha_1 \oplus \alpha_2)}]_{f^*})^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.6}{\equiv} ([(E \oplus E)_{f^*}]^{(\alpha_1 \oplus \alpha_2)})^{g^*}) \\
&\overset{Kor.2.2(i)}{\equiv} ([(E)^{f^*}]^{(\alpha_1 \oplus \alpha_2)})^{g^*} \\
&\overset{Prop.2.1(iv)}{\equiv} (E)^{g^*(\alpha_1 \oplus \alpha_2) f^*} \\
&\equiv (E)^{\alpha_1 + \alpha_2} \\
&\overset{Def.}{\equiv} E^{\alpha_1 + \alpha_2}
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.1.
$Ext_R(C, A)$ ist bzgl. der Baer Summe eine abelsche Gruppe.

Beweis.
Assoziativität: *Seien $E_1, E_2, E_3 \in Ext_R(C, A)$. Dann ist:*

$$
\begin{aligned}
(E_1 + E_2) + E_3 &\equiv [(E_3 \oplus [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*})_{f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Prop.2.1}{\equiv} [([(E_3)_{1_C}]^{1_A} \oplus [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*})_{f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} [([(E_3)_{1_C} \oplus (E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{(1_A \oplus g^*)})_{f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} [([(E_3 \oplus E_1 \oplus E_2)_{(1_C \oplus f^*)}]^{(1_A \oplus g^*)})_{f^*}]^{g^*} \\
&\equiv [([(E_2 \oplus E_3 \oplus E_1)_{(f^* \oplus 1_C)}]^{(g^* \oplus 1_A)})_{f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} [([(E_2 \oplus E_3)_{f^*} \oplus (E_1)_{1_C}]^{(g^* \oplus 1_A)})_{f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.7}{\equiv} [([(E_2 \oplus E_3)_{f^*}]^{g^*} \oplus [(E_1)_{1_C}]^{1_A})_{f^*}]^{g^*} \\
&\equiv [([(E_2 \oplus E_3)_{f^*}]^{g^*} \oplus E_1)_{f^*}]^{g^*} \\
&\equiv E_1 + (E_2 + E_3)
\end{aligned}
$$

Neutrales Element:
Die Klasse der gespaltenen Erweiterung ist das neutrale Element bzgl. der Baer Summe, denn: Sei $E \in Ext_R(C, A)$ und E^* eine gespaltene Erweiterung in $Ext_R(C, A)$. Dann ist:

$$E + E^* \equiv E^{1_A} + E^{0_A} \equiv E^{(1_A + 0_A)} \equiv E^{1_A} \equiv E$$

Hierbei wurde verwendet: $E^* \equiv E^{0_A}$.
Inverses Element:
Zu einer Erweiterung $E \in Ext_R(C, A)$ ist die Erweiterung E^{-1_A} das inverse Element, denn:

$$E + E^{-1_A} \equiv E^{1_A} + E^{-1_A} \equiv E^{(1_A - 1_A)} \equiv E^{0_A} \equiv E^*$$

Kommutativität: *Seien $E_1, E_2 \in Ext_R(C, A)$ und*

$$\tau_M : M \oplus M \to M \oplus M,\ (m_1, m_2) \mapsto (m_2, m_1)$$

Dann gilt: $\tau_C f^* = f^*$ *und* $g^* \tau_A = g^*$. *Damit folgt:*

$$
\begin{aligned}
E_1 + E_2 &\overset{Def.}{\equiv} [(E_1 \oplus E_2)_{f^*}]^{g^*} \\
&\equiv [(E_1 \oplus E_2)_{\tau_C f^*}]^{g^*} \\
&\overset{Prop.2.1(iv)}{\equiv} ([(E_1 \oplus E_2)_{\tau_C}]_{f^*})^{g^*} \\
&\equiv ([(E_2 \oplus E_1)^{\tau_A}]_{f^*})^{g^*} \\
&\overset{Lem.2.6}{\equiv} ([(E_2 \oplus E_1)^{\tau_A}]^{g^*})_{f^*} \\
&\overset{Prop.2.1(iv)}{\equiv} [(E_2 \oplus E_1)^{g^* \tau_A}]_{f^*} \\
&\equiv [(E_2 \oplus E_1)^{g^*}]_{f^*} \\
&\overset{Def.}{\equiv} E_2 + E_1
\end{aligned}
$$

$\square$