

Die Perron–Frobenius–Tabelle der Deutschen Fußballbundesliga

GÜNTER CZICHOWSKI, DIRK FRETTLÖH
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
UNIVERSITÄT GREIFSWALD
JAHNSTR. 15A
17487 GREIFSWALD

In der Fußballbundesliga gibt es für jeden Sieg drei Punkte, für jedes Unentschieden einen Punkt, ungeachtet dessen, ob der Gegner Bayern München heißt oder St. Pauli. Was würde passieren, wenn man die Punkte je nach Stärke des Gegners vergibt? Und wie kann man das errechnen?

Darauf gibt es eine elegante Antwort. Die Stärke eines Gegners soll sich nach der Abschlusstabelle bemessen (nicht unbedingt an der herkömmlichen Abschlusstabelle, sondern an unserer, die wir nun herleiten). Bezeichnen wir mit $P_{i,j}$ die Zahl der (herkömmlichen) Punkte, die Mannschaft i gegen Mannschaft j in einer Saison erzielt hat, und die Spielstärke von Mannschaft j mit S_j , so bekommt Mannschaft i die erzielten Punkte gutgeschrieben, gewichtet mit der Stärke des jeweiligen Gegners. Insgesamt also:

$$P_{i,1}S_1 + P_{i,2}S_2 + P_{i,3}S_3 + \cdots + P_{i,18}S_{18}.$$

Diese Punktzahl soll entscheidend sein für unsere Abschlusstabelle. Also proportional zur Spielstärke. Und da beißt sich scheinbar die Katze in den Schwanz: Wir brauchen die Spielstärken, um die Punktzahlen zu errechnen, und umgekehrt. In Wirklichkeit liegt hier aber lediglich ein Eigenwertproblem vor:

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,18} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{18,1} & \cdots & P_{18,18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_{18} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_{18} \end{pmatrix}$$

Und nun kann man (im Prinzip) folgenden Satz benutzen:

Satz 1 (Perron–Frobenius) Sei $P = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Matrix mit reellwertigen, nichtnegativen Einträgen und der Eigenschaft, dass eine Potenz P^k dieser Matrix ausschließlich positive Einträge hat. Dann besitzt P einen positiven reellen einfachen Eigenwert λ , dessen Betrag größer ist als der Betrag jedes anderen Eigenwerts von P . Weiterhin gibt es einen Eigenvektor S zu λ , der ausschließlich positive Einträge hat.

Gut: Unsere Matrix von oben, nennen wir sie auch P , hat gewiss die Eigenschaft, dass alle Einträge nichtnegativ sind, denn Minuspunkte kann man in der Bundesliga nur am grünen Tisch bekommen, nicht durch Punktspiele. Die zweite Eigenschaft nehmen wir einfach mal als gegeben. (In der Tat ist diese zweite Eigenschaft praktisch immer erfüllt. Nicht erfüllt wäre sie etwa, wenn eine Mannschaft alle Spielen gewinnen würde, was noch nie vorkam.)

Also müssen wir lediglich

1. Die Matrix P aufstellen
2. Deren Eigenwerte ausrechnen
3. Zum betragsgrößten Eigenwert einen Eigenvektor S berechnen

Dieser Vektor S (bzw. $-S$) liefert nun die Spielstärke, und somit auch die Tabelle. (Warum ausgerechnet dieser Eigenvektor, und nicht einer zu einem anderen Eigenwert, das bedarf noch zusätzlicher Überlegung.)

Die so errechneten Tabellen für die Spielzeiten 2001/2002, 2002/2003 und 2003/2004 finden sich auf den folgenden Seiten. Die Punktzahlen wurden der besseren Vergleichbarkeit halber so angepasst, dass dieselbe Durchschnittspunktzahl wie in der wahren Tabelle entsteht. Wenn ein Team nach unserer Rechnung mehr Punkte hat als nach herkömmlicher Rechnung, so bedeutet das, dass es gegen starke Gegner relativ viele Punkte sammeln konnte. Umgekehrt, hat ein Team in unserer Tabelle weniger Punkte als in der herkömmlichen, so hat es seine Siege hauptsächlich gegen schwache Gegner eingefahren.

Literatur

- [1] O. Perron: Zur Theorie der Matrices, *Math. Annalen*, **64** (1907) 248–263
- [2] E. Seneta: *Non-negative matrices*, George Allen & Unwin Ltd., London (1973)
- [3] H. Wilf: Searching the web with eigenvectors,
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/KendallWei.pdf>

Die Abschlusstabelle / Die Perron–Frobenius–Tabelle

Bundesligasaison 2001/2002

1	Borussia Dortmund	70	1	Bayern München	70,3
2	Bayer Leverkusen	69	2	Borussia Dortmund	69,0
3	Bayern München	68	3	Bayer Leverkusen	67,8
4	Hertha BSC Berlin	61	4	Hertha BSC Berlin	65,7
5	Schalke 04	61	5	Werder Bremen	62,4
6	Werder Bremen	56	6	Schalke 04	59,4
7	1.FC Kaiserslautern	56	7	1.FC Kaiserslautern	53,3
8	VfB Stuttgart	50	8	VfB Stuttgart	49,6
9	1860 München	50	9	1860 München	46,4
10	VfL Wolfsburg	46	10	VfL Wolfsburg	46,3
11	Hamburger SV	40	11	Hamburger SV	40,0
12	Mönchengladbach	39	12	Mönchengladbach	38,7
13	Energie Cottbus	35	13	Energie Cottbus	33,6
14	Hansa Rostock	34	14	SC Freiburg	33,5
15	1.FC Nürnberg	34	15	1.FC Nürnberg	31,8
16	SC Freiburg	30	16	Hansa Rostock	31,2
17	1.FC Köln	29	17	1.FC Köln	26,1
18	FC St.Pauli	22	18	St.Pauli	24,7

Die Tabelle der jeweils gegeneinander erzielten Punkte

Borussia Dortmund	·	4	3	4	6	1	1	6	6	3	1	3	6	6	4	6	4	6
Werder Bremen	1	·	3	6	2	4	6	3	3	3	6	1	3	0	6	6	3	3
1.FC Kaiserslautern	3	3	·	6	6	1	0	6	6	3	1	1	4	3	4	3	3	3
1.FC Nürnberg	1	0	0	·	6	1	3	0	3	3	0	3	1	3	4	3	3	0
1. FC Köln	0	2	0	0	·	0	0	0	4	4	1	2	3	3	6	3	0	1
Bayern München	4	1	4	4	6	·	4	1	6	6	3	6	4	6	3	3	4	3
Bayer Leverkusen	4	0	6	3	6	1	·	6	6	4	1	6	4	6	4	6	3	3
Mönchengladbach	0	3	0	6	6	4	0	·	2	4	1	2	4	1	2	1	0	3
Energie Cottbus	0	3	0	3	1	0	0	2	·	3	3	2	3	1	3	4	1	4
SC Freiburg	3	3	3	3	1	0	1	1	3	·	3	0	4	0	1	1	2	1
Schalke 04	4	0	4	6	4	3	4	4	3	3	·	3	4	6	6	6	0	0
VfB Stuttgart	3	4	4	3	2	0	0	2	2	6	3	·	3	1	6	4	6	1
Hamburger SV	0	3	1	4	3	1	1	1	3	1	1	3	·	4	6	1	4	3
1860 München	0	6	3	3	3	0	0	4	4	6	0	4	1	·	6	4	6	0
St. Pauli	1	0	1	1	0	3	1	2	3	4	0	0	0	0	·	0	4	2
Hansa Rostock	0	0	3	3	3	3	0	4	1	4	0	1	4	1	6	·	0	1
VfL Wolfsburg	1	3	3	3	6	1	3	6	4	2	6	0	1	0	1	6	·	0
Hertha BSC Berlin	0	6	3	6	4	3	3	3	1	4	4	4	3	6	2	4	6	·

Kommentar: Auffällig ist, dass nach unserer Methode nicht der BVB, sondern (wieder mal) der FC Bayern Meister geworden wäre. Das ist plausibel: Bayern hat auch gegen starke Teams viel gepunktet, während Dortmund aus den 6 Spielen gegen Leverkusen, Bayern und Schalke insgesamt nur magere 3 Punkte holen konnte.

Außerdem wäre Rostock statt Freiburg abgestiegen. Beide Mannschaften sahen gegen die Top-teams nicht gut aus, aber Rostock holte mehr Punkte gegen die Teams im Tabellenkeller, etwa gegen St. Pauli oder eben Freiburg, und diese Punkte zählen in unserer Wertung wenig.

Die Abschlusstabelle / Die Perron–Frobenius–Tabelle

Bundesligasaison 2002/2003

1	Bayern München	75	1	Bayern München	73,5
2	VfB Stuttgart	59	2	Werder Bremen	57,7
3	Borussia Dortmund	58	3	Borussia Dortmund	57,4
4	Hamburger SV	56	4	VfB Stuttgart	56,5
5	Hertha BSC Berlin	54	5	Hamburger SV	55,8
6	Werder Bremen	52	6	Hertha BSC Berlin	50,97
7	Schalke 04	49	7	Schalke 04	50,93
8	VfL Wolfsburg	46	8	VfL Wolfsburg	46,6
9	VfL Bochum	45	9	1860 München	43,9
10	1860 München	45	10	VfL Bochum	43,3
11	Hannover 96	43	11	Hannover 96	43,1
12	Mönchengladbach	42	12	Mönchengladbach	42,6
13	Hansa Rostock	41	13	Bayer Leverkusen	41,5
14	1.FC Kaiserslautern	40	14	Hansa Rostock	39,6
15	Bayer Leverkusen	40	15	1.FC Kaiserslautern	39,0
16	Arminia Bielefeld	36	16	Arminia Bielefeld	38,6
17	1.FC Nürnberg	30	17	1.FC Nürnberg	30,6
18	Energie Cottbus	30	18	Energie Cottbus	29,5

Die Tabelle der jeweils gegeneinander erzielten Punkte

Borussia Dortmund	·	1	4	4	6	4	4	6	2	6	2	3	3	3	2	1	3	4
Hertha BSC Berlin	4	·	6	1	6	3	3	6	3	6	4	0	3	0	4	1	1	3
Energie Cottbus	1	0	·	4	4	3	0	1	2	6	4	3	1	0	0	0	1	0
Bayer Leverkusen	1	4	1	·	3	0	6	3	0	3	4	3	2	3	3	1	0	3
1.FC Nürnberg	0	0	1	3	·	0	1	0	0	3	4	3	3	0	2	4	3	3
VfL Bochum	1	3	3	6	6	·	4	1	2	1	3	0	2	0	3	3	3	4
1860 München	1	3	6	0	4	1	·	3	1	3	3	6	6	0	4	2	0	2
Hansa Rostock	0	0	4	3	6	4	3	·	1	0	3	4	3	0	4	3	2	1
Hamburger SV	2	3	2	6	6	2	4	4	·	4	3	3	3	1	3	3	4	3
Hannover 96	0	0	0	3	3	4	3	6	1	·	4	4	1	2	3	3	0	6
Arminia Bielefeld	2	1	1	1	1	3	3	3	3	1	·	4	3	1	4	3	0	2
Werder Bremen	3	6	3	3	3	6	0	1	3	1	1	·	3	6	4	0	6	3
Mönchengladbach	3	3	4	2	3	2	0	3	3	4	3	3	·	1	1	3	1	3
Bayern München	3	6	6	3	6	6	6	6	4	2	4	0	4	·	1	6	6	6
Schalke 04	2	1	6	3	2	3	1	1	3	3	1	1	4	4	·	6	4	4
VfL Wolfsburg	4	4	6	4	1	3	2	3	3	3	3	6	3	0	0	·	0	1
VfB Stuttgart	3	4	4	6	3	3	6	2	1	6	6	0	4	0	1	6	·	4
1.FC Kaiserslautern	1	3	6	3	3	1	2	4	3	0	2	3	3	0	1	4	1	·

Kommentar: Meister und Absteiger stimmen bei beiden Tabellen überein. Auffällig ist aber, dass Werder nach unserer Rechnung in der Championsleague gespielt hätte statt im UI-Cup. Nicht ganz unverdient: Werder erspielte gegen die fünf bestplatzierten Teams 8 Siege aus 10 Spielen.

Stuttgart dagegen würde nur im UEFA-Cup spielen (was ja schade wäre, so wie sie in der Championsleague aufgetreten sind).

Ansonsten sind sich beide Tabellen recht ähnlich. Interessant ist noch: der Vorsprung von Hertha auf Schalke beträgt gerade einmal 0,04 Punkte.

Die Abschlusstabelle / Die Perron–Frobenius–Tabelle

Bundesligasaison 2003/2004

1	Werder Bremen	74	1	Werder Bremen	73, 2
2	Bayern München	68	2	Bayern München	68, 3
3	Bayer Leverkusen	65	3	Bayer Leverkusen	67, 7
4	VfB Stuttgart	64	4	VfB Stuttgart	64, 6
5	VfL Bochum	56	5	VfL Bochum	58, 3
6	Borussia Dortmund	55	6	Borussia Dortmund	54, 8
7	Schalke 04	50	7	Schalke 04	50, 1
8	Hamburger SV	49	8	Hamburger SV	47, 2
9	Hansa Rostock	44	9	Hansa Rostock	44, 1
10	VfL Wolfsburg	42	10	Hertha BSC Berlin	39, 6
11	Mönchengladbach	39	11	VfL Wolfsburg	39, 5
12	Hertha BSC Berlin	39	12	Mönchengladbach	38, 9
13	SC Freiburg	38	13	SC Freiburg	37, 6
14	Hannover 96	37	14	Hannover 96	34, 8
15	1.FC Kaiserslautern	36	15	1.FC Kaiserslautern	33, 9
16	Eintracht Frankfurt	32	16	Eintracht Frankfurt	33, 3
17	1860 München	32	17	1860 München	29, 3
18	1.FC Köln	23	18	1.FC Köln	24, 7

Die Tabelle der jeweils gegeneinander erzielten Punkte

Werder Bremen	·	4	3	1	4	3	4	4	3	6	4	6	4	4	6	6	6	6
Bayern München	1	·	4	3	3	3	3	6	4	3	4	4	6	4	6	4	6	4
Bayer Leverkusen	3	1	·	6	0	4	6	3	6	6	4	6	3	4	4	3	2	4
VfB Stuttgart	4	3	0	·	2	6	2	1	6	6	4	1	6	6	3	6	6	2
VfL Bochum	1	3	6	2	·	3	3	2	4	3	4	2	3	4	4	3	3	6
Borussia Dortmund	3	3	1	0	3	·	1	6	3	6	3	1	4	4	2	6	6	3
Schalke 04	1	3	0	2	3	4	·	4	0	2	3	6	3	4	6	1	2	6
Hamburger SV	1	0	3	4	2	0	1	·	3	3	3	4	4	0	3	6	6	6
Hansa Rostock	3	1	0	0	1	3	6	3	·	3	1	1	4	4	3	4	6	1
VfL Wolfsburg	0	3	0	0	3	0	2	3	3	·	3	3	3	4	3	3	3	6
Mönchengladbach	1	1	1	1	1	3	3	3	4	3	·	1	1	3	4	0	6	3
Hertha BSC Berlin	0	1	0	4	2	4	0	1	4	3	4	·	4	3	3	1	2	3
SC Freiburg	1	0	3	0	3	1	3	1	1	3	4	1	·	3	4	3	4	3
Hannover 96	1	1	1	0	1	1	1	6	1	1	3	3	3	·	0	4	4	6
1.FC Kaiserslautern	0	0	1	3	1	2	0	3	3	3	1	3	1	6	·	6	0	6
Eintracht Frankfurt	0	1	3	0	3	0	4	0	1	3	6	4	3	1	0	·	0	3
1860 München	0	0	2	0	3	0	2	0	0	3	0	2	1	1	6	6	·	6
1.FC Köln	0	1	1	2	0	3	0	0	4	0	3	3	3	0	0	3	0	·

Kommentar: Kaiserslautern wurden als Strafe wegen Unregelmäßigkeiten in den Lizenzunterlagen 3 Punkte abgezogen. Das ist in beiden Tabellen berücksichtigt. In unserer Tabelle macht sich das stärker bemerkbar, da Kaiserslautern seine Punkte fast nur gegen schwache Teams holte: Diese Punkte zählen weniger, und der Punktabzug wirkt sich stärker aus. Trotzdem wäre Kaiserslautern gerettet. Überhaupt sind die Tabellen diesmal fast gleich. Lediglich Hertha verbessert sich nach unserer Rechnung auf Grund einer guten Bilanz gegen starke Mannschaften (und einer schlechten gegen Schwache) um zwei Plätze.