Beyträge
zum Gebrauche der
Mathematik
und deren Anwendung

durch

J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Erster Abschnitt.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realschule,
1770.

Vorrede.

Ich liefere hier wiederum einige Abhandlungen, die theils die Erweiterung, theils die Anwendung der Mathematik zur Absicht haben. Es sind deren zwölfe von so verschiedenem Inhalte, daß jede besonders angezeigt werden müste, wenn man von allen zusammen genommen einen Begrif geben wollte. Ich kann aber dieses hier unterlassen, und diejenigen, die so geschwinde weg ein Buch übersehen wollen, auf das am Ende dieser Vorrede stehende Verzeichniß verweisen. Andern, die sich etwas mehr umsehen wollen, muß ich sagen, daß sie von jeder Abhandlung wenigstens den Anfang lesen, wo sie mehrentheils angezeigt finden werden, wohin es bey jeder abgesehen ist. Vielleicht nehmen sie sich dann die Gedult, weiter fort zu lesen, und beym Fortlesen finden sie etwan auch Dinge, die, wenn sie schon nicht anfangs angekündigt waren, dennoch von einiger Brauchbarkeit und Erheblichkeit seyn werden.

Dieses ist nun, was ich überhaupt zu sagen hatte. Es bleiben aber noch Anmerkungen über einzelne Stellen zurücke, die hier ihren Ort finden mögen. Einmal habe ich diese Abhandlungen nicht ununterbrochen, sondern seit 1765 nach und nach geschrieben. Und dieses muß, um Anachronismen zu vermeiden, erinnert werden. So z. E. ist die hier vorkommende fünfte Abhandlung: für die Erforscher der Quadratur des Circuls, im Jahr 1766 vor derjenigen geschrieben worden, die ich einige Monathe nachher bey der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften über eben die Materie vorgelesen. Sie

Sie können aber beyde ganz wohl beysammen bestehen. In der zweyten Abhandlung: Theiler der Zahlen in Tabellen wird man sehen, daß ich erst nachgehends näher müsse erfahren haben, was es mit Pells Tafel von den Theilern der Zahlen für eine Bewandtniß habe. Man wird daher nicht übel thun, wenn man diese 2te Abhandlung mit dem vergleicht, was ich in den ganz neu herausgekommenen Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen über die Sache anmerke. Die hier gelieferte Tafel der Theiler der Zahlen erstreckt sich zwar nur bis auf 10200, sie giebt aber bey jeder Zahl die sämtlichen Factoren an, hingegen geht die Pellsche Tafel zehnmal weiter, es wird aber darin bey jeder Zahl nur ihr kleinster Theiler angegeben. Wer demnach die Pellsche Tafel vollständig machen wolte, würde immer noch etwas zu thun finden, wiewohl ich im §. 15. darauf eben noch nicht die rechte Unsterblichkeit des Namnes setze.

In Ansehung der vierten Abhandlung, welche algebraische Ausdrücke der

 Sinus

Sinus von 3 zu 3 Graden liefert, muß ich hier anmerken, daß bereits Wallis sich die Mühe gegeben, ähnliche Formeln für die Chorden zu berechnen. Sie werden aber wegen der veralteten Zeichnungsart, dafern man sich nicht daran gewöhnt, ziemlich unleslich.

Bey der zweyten Abhandlung verdient Huygens, daß ich wenigstens hier erwähne, daß er von den in einem fortgehenden Brüchen (fractio continua) zuerst Gebrauch gemacht hat, als er für die Umlaufszeit der Planeten, geschmeidige Verhältnisse in ganzen Zahlen suchte.

Was ich im Anfange der achten Abhandlung von Auflösung der Cubic- und Biquadrat-Gleichungen sage, wird sich nützlich mit den Formeln vergleichen lassen, die in vorerwähnten Tabellen vorkommen. Ueber die Verwandlung der Gleichungen hat, wo ich mich recht erinnere, Waring, ein Engländer, einen den meinigen ganz ähnlichen Versuch gemacht, er nimmt aber die Sache so sehr abstracte vor, daß er die Vortheile, so besondere und einfa-

chere

chere Fälle anbieten, gar nicht sehen konnte.

Wer die eilfte Abhandlung über die Grundsätze des Gleichgewichtes und der Bewegung zum Lernen lieset, der wird hin und wieder einige Aufmerksamkeit gebrauchen müssen; denen aber muß ich Bedacht anrathen, die diese Abhandlung, um sie zu beurtheilen, lesen wollen. Was im eigentlichsten Verstande a priori seyn soll, kann nur Möglichkeiten enthalten. Man muß aber diese Möglichkeiten am allgemeinsten nehmen, sie vollständig vorzählen, und dann erst sehen, welche davon in der wirklichen Welt vorkommen, und unter welchen Bedingungen sie vorkommen. Was einer Möglichkeit den so verachteten Namen einer Hypothese giebt, ist nicht, daß es eine Möglichkeit ist, sondern das unbewiesene Voraussetzen, daß diese Möglichkeit existire. Betrachtungen von dieser Art machten, daß ich den Begrif der Kraft anfangs sehr abstract genommen, und nicht sogleich den Begrif der Schwere damit verbunden habe. Der abstracte Begrif ist aber ge-

rade

rade derjenige, den wir uns gedenken, wenn wir uns eine Kraft überhaupt vorstellen, oder auch, wenn wir auf unsere eigene Empfindung merken. Der siebente Abschnitt der Abhandlung wird über den Vortrag und die Anordnung der vorhergehende Abschnitte ein ziemliches Licht ausbreiten. Man muß aber, um dabey recht zu sehen, diese vorhergehende Abschnitte vorerst gelesen haben. Noch bleibt hier anzumercken, daß die im siebenten Abschnitte angeführte Erfahrungen mit einer Allgemeinheit und mit einem Anschein von äusserst genauer Richtigkeit vorgetragen sind, für welche ich gar nicht gut stehe. Man nimmt sie zwar gewöhnlich so an, und bey dem Gebrauche der Mechanik im gemeinen Leben kann man es auch dabey bewenden lassen. Wer aber auf Theorie sieht, der kann sowohl die durchgängige Allgemeinheit als die bis auf Infinitesimaltheilchen richtige Genauigkeit in Zweifel ziehen. Vielleicht wird die noch immer so schwere und noch immer so unbekannte Theorie der Schwere und des dabey vorkommenden Mechanismus

nismus dabey gewinnen. In der That suchte auch Newton sich durch besondere Versuche zu überzeugen, ob das, was man in der Dynamic Masse nennt, dem, was man in der Static Gewicht nennt, so durchgängig proportional sey? Die Versuche, so wie er sie anstellte, wiederlegten den Satz nicht. Vielmehr zeigten sie eine Proportionalität. Sie zeigten aber diese nicht genauer als Newton beobachten konte. Und so läßt sich, wenn es auf sehr kleine Unterschiede ankommen sollte, noch anstehen, ob die Proportionalität bis aufs unendlich Kleine statt habe. Die meisten Körper verliehren im Feuer von ihrer Masse, einige aber werden im Feuer schwerer. Wie, wenn sie bey wenigerer Masse dennoch mehr Gewicht erhielten? Es mag nun aber mit bemeldten Erfahrungen beschaffen seyn, wie es wolle, so richten sich die im siebenten Abschnitte daraus gezogenen Schlüsse genau nach denselben, und welchem Schlussen etwas abgebrochen werden muß, daß wird der Erfahrung abgebrochen, die dabey zum Grunde liegt. Auch dieses aber zeigt, warum der siebente Abschnitt nicht der erste, oder überhaupt warum er erst der siebente ist.

Es ist billig, daß ich hier nebst Herrn Pr. Tetens, der ganz neulich über das Principium minimi eine schöne Abhandlung bekannt gemacht hat, die Herren Pr. Kästner und Karsten, als solche Gelehrten nenne, die sich wegen Berichtigung der Beweise auch in der Mechanik hervorgethan haben. Ihre Bemühungen sind weder unerheblich noch überflüßig. Das meiste in der Mechanik war immer noch blos deswegen wahr, weil es die Erfahrung lehrte, und in der Hydrostatik gieng es mit den Beweisen nicht besser. Ungeachtet ich nun hier in dem Vortrage der statischen Sätze einen andern Weg genommen, so finde ich dennoch den von diesen beyden Gelehrten gegebenen Beweis vom Gleichgewichte bey dem Hebel, so weit er reicht, ganz gut. Was sie beyde selbst noch dabey vermissen werden, ist daß der Beweis von jeden Verhältnissen aus dem Beweise von Verhältnissen in ganzen Zahlen hergeleitet werden muß, und eben

eben daher viel von der Kürze, Geschmeidigkeit und von dem Einfachen verleurt, welches man bey den ersten Grundsätzen oder unmittelbar aus den Gründen abzuleitenden Lehrsätzen verlangen kann. Ich hatte mich, wiewohl ohne sonderlichen Erfolg, umgesehen, wiefern die Sache abgekürzt werden kan. Ich gab aber die Sache noch wegen einer andern Betrachtung auf, und diese ist folgende:

Man setze, daß es sich leicht und strenge erweisen lässe, daß bey dem Hebel Kraft zur Last in umgekehrter Verhältniß des Abstandes sey, so sehr auch Kraft und Last unter sich incommensurabel seyn mögen. Wenn auch ein solcher Beweis angeht, so hat man damit noch nicht viel anders gewonnen, als daß man das Gesetz bewiesen hat, nach welchem Kräfte auf einzelne Puncte des Hebels wirken. Es würde aber immer ein Sprung nnd zwar ein Sprung von einer auf zwo Dimensionen seyn, wenn man von Kräften, die auf einzelne Puncte wirken, auf Kräfte verfallen wollte, die auf ganze Linien wirken. So hete-

heterogen indessen diese Kräfte sind, so ist es dessen unerachtet gedenkbar, daß eine auf einen Punct angebrachte Kraft, einer auf eine ganze Linie wirkenden Kraft das Gleichgewicht halte. Die Kräfte sind hier eben so wie Puncte und Linien, der Dimension nach, verschieden, weil sonst von keinem Gleichgewichte, und überhaupt von keiner Vergleichung die Rede seyn könnte. Die hieher gehörende Begriffe und Grundsätze müssen nun nothwendig vorausgeschicket werden; und dieses machte auch, daß ich die Dimensionen der Kraft im dritten Abschnitte, die Theorie des Hebels aber erst im vierten vortrug, und so war es ein leichtes, diese Theorie behörig ins reine zu setzen. Alles kömmt auf den §. 31 an. Die daselbst gebrauchte Voraussetzung ist, daß eine auf eine ganze Linie gleichförmig vertheilte Kraft eben so wie die Linie in beliebige Theile getheilt werden könne, und die Theile der Kraft eben so wie die Theile der Linien ihr Verhältniß zum Ganzen behalten. Diesen Satz mag man als einen

einen Grundsatz oder als ein *Postulatum* ansehen; es gilt mir gleichviel. Mir scheint er in dem Begrif der Kraft so am Tage zu liegen, daß ich nicht mehr wissen würde, was eine Kraft ist, wenn er erst sollte bewiesen oder in Zweifel gezogen werden. Und wenn ich auch die Theorie des Hebels nicht darauf gründen wollte, so bleibt er dessen unerachtet, eben so unentbehrlich, weil man in der Mechanik immer auch solche Kräfte betrachten muß, die auf ganze Linien, Flächen und körperliche Räume vertheilt sind. Muß man ihn aber als einen Grundsatz annehmen, um andere Hauptstücke der Mechanik darauf zu gründen, so gründe ich mit gleichem Rechte die Theorie des Hebels darauf, und erspahre dadurch so wohl das Aufsuchen anderer oder gar nicht zu findender Grundsätze, als ängstlich gesuchte Beweise, die zuletzt dennoch nur für einzelne Puncte des Hebels dienen.

Der nach dem dreyzehnten Abschnitte eingerückte Zusatz sollte eigentlich nach dem vierzehnten folgen, wie man es gleich aus den ersten fünf Zeilen sehen kann. Es

Es hat übrigens dieses Versetzen nichts auf sich, wiewol es wäre geändert worden, wenn ich die Aushängebogen nicht erst nach dem Abdrucke erhalten hätte. Aus gleichem Grunde muß auch S. 72

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

gelesen werden. S. 114 ist in den drey letzten Ueberresten im Rechnen um eine Unität gefehlt, um welche die achte Decimalstelle zu klein ist; und S. 154 unten muß

Nun ist

$$3 \log. (b : a) = 0,6820631 - 17$$
$$l. \tfrac{2}{81} \; - \; - \; - = 0,3925450 - 2$$
$$\tfrac{1}{3} \log. a \; - \; - = 0,7598949 - 1$$

demnach

$$\log. \frac{2 b^3}{81 a^3} . \sqrt[3]{a} = 0,8345030 - 19$$

gelesen werden. In den Kupferplatten sind folgende Aenderungen zu machen:

Tab. III. Fig. 2. wird bey dem Durchschnittspunct der Bögen EM, GC ein A gesetzt.

Tab. III. Fig. 5 muß oben zwischen z, w ein N stehen.

Tab. V. Fig. 14. wird am untern Ecke ein D gesetzt.

Tab. VI. Fig. 18. wird von g nach q eine blinde Linie gezogen.

Die

Die übrigen Errata, die von einiger Erheblichkeit sind, finden sich am Ende der Vorrede; und die so ich beym nochmaligen Collationiren in den Mondstafeln und den Beyspielen bemerkt, am Ende derselben. In der Tafel von den Theilern der Zahlen müssen

bey	1117	die Theiler	11. 101
- -	1603	- - - -	7. 229
- -	2737	- - - -	7. 17. 23
- -	4249	- - - -	7. 607
- -	8981	- - - -	7. 1283

gesetzt werden.

Einige Fehler im Texte rühren noch daher, daß der Setzer, vielleicht der Märkischen Mundart gemäß, die Fallendungen verwechselt, und z. E.

S. 172. l. 4. um sich der anstatt um sich die

S. 391. l. penult. denselben anstatt demselben.

S. 512. l. 5. von unten, den Körper anstatt dem Körper rc.

gesetzt hat.

Wer die Mondstafeln gebrauchen will, thut wohl, wenn er die bemerkten Errata derselben ausbessert. Ich glaube, daß sie sodann ziemlich zuverläßig seyn werden. Indessen da man

bey

bey dem Gebrauche selbst auch sich überrechnen kann, so ist das Rathsamste, jede Rechnung doppelt zu machen; bey der einen die Tage vom Anfang, bey der andern die Tage vom Ende des Jahrs zu gebrauchen. Dabey gebraucht man sodann auch in der zweyten Tafel zween verschiedene Jahrgänge, und da man doch einerley heraus bringen muß, so wird die Vergleichung immer zur Porbe dienen, und dadurch werden die mittlern Bewegungen ausser Zweiffel gesetzt, oder man kann wenigstens den Fehler nachspühren. Andere Mittel werden sich, wenn man sich einmal an die Tafeln gewöhnt hat, leicht anbieten. Selbst in der Abhandlung kommen einige bey den Beyspielen vor.

Da dieser zweyte Theil der Beyträge doppelt stärker geworden als der erste, so habe ich zwey Titelblätter abdrucken lassen, wovon das Zweyte vor die eilfte Abhandlung gebunden werden muß. Der Buchbinder wird daran dergestalt erinnert, daß er sich nach der Willkühr des Besitzers zu erkundigen hat, ob dieser zween oder nur einen Band haben will.

ERRATA.

Errata.

Seite	anstatt	liese:
2. linie 6	Theile	Theiler
5. l. 15	z. E.	So z. E.
5. unten	Ueberrest der	Ueberrest. Die
6. l. 18	$a - x$ mal	$a + x$ mal
29. l. 21	fürgegeben ist	fürgegeben, ist
30. l. 16	in einer	inner
70. l. 10	in Rechnung	Rechnung
78. §. 20. l. 1	$2 = 1$	$z = 1$
79. §. 21. l. 2	$l(1+2) = 2 \ldots$ ꝛc.	$l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 +$ &c.
80. l. 1	$2 = 2$	$z = 2$
88. l. 3 von unten	$a^{2n+2} + b^{2n+2}$	$a^{2n+2} - b^{2n+2}$
97. §. 32. l. 11	657153 ꝛc.	67153 ꝛc.
118. §. 47. l. 3	$\frac{1}{7} + x^7$	$\frac{1}{7} x^7$
120. l. 3	$\frac{1}{9} \frac{1}{11}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
144. l. 4	Rakensburg	Ravensburg
192. §. 9. l. 6	Ax	Ax^2
213. l. 3	y^2	z
215. l. 23	$z^6 + \ldots$	$x^6 + \ldots$
254. l. 3	$m \nu C$	$\mu \nu C$
254. l. 5	$\alpha \mu \alpha$	$a \mu \alpha$
262. §. 15. l. 1	NH, MK	MH, NK
324. §. 13. l. 3	e	k
324. §. 13. am Ende	$d = NL$	$\delta = NL$
329. l. 18	Gleichgewichte	Gewichte

Errata.

Seite	anstatt	liese:
333. §. 23. am Ende	EAE	EAR
340. §. 32. l. 5	EN	ER
349. unten	12ten Figur	13ten Figur
353. §. 48. l. 9	k	K
ibid. = = =	MP	AP
407. §. 45. l. 3	E	P
416. §. 54. l. 13	Schwürigkeiten	Schwünge
421. am Rande	Fig. IX	Fig. XI.
422. unten	p =	b =
439. l. 4	6 γ	C γ
= = am Rande	Fig XI	Fig. XII
449. l. 3	CD	Cd
= = = 4	CA	Ca
488. l. 5	dcvk : m	dc∽k : m
496. l. 4	M	Q
520. l. 5	DC	DB
= = 6	DD	DB
= = 13	R	k
521. unten	P. DP	P. DB
542. l. 1	DEH	DEK
543. l. 9	gesetzte	Gesetz
618. l. 1	als	als die
639. §. 8. l. 6	weil	weil man
644. §. 11. l. 4	138	183
652. §. 22. l. 11	Eben so	finden. Eben so
658. l. 5	3 12 34 27	3 12 39 27
= = ibid.	3 12 39 46	3 12 34 46
= = §. 30. l. 7	142 20 46 39	144 20 46 39

665.

Errata.

Seite	anstatt	liese:
665. §. 38. am Ende	PM	P—M
669. §. 48. l. 5	1 S	2 S
691.	$TL = \frac{1 - ee}{1 = e \cos\mu}$	$TL = \frac{1 - ee}{1 - e \cos\mu}$
693. l. 11. von unten	warum	warum sich
698. l. 3	+92 ſ2(2☉−2☊)	+92 ſ(2☉—2☊)
738. l. 10	20 St.	21 St.
767. §. 186. l. 3	Inclination	Declination
778. §. 200. l. 4	die meisten	wie die meisten
805. l. 3. von unten	1738	1783

b 2 Inhalt.

Inhalt.

16°.

14°

Inhalt.

I.
Theilung und Theiler der Zahlen.

§. 1.

Es ist nicht zu zweifeln, daß die Aufgabe von Erfindung der Theiler der Zahlen von den ältesten Zeiten an die Geometer beschäftigt habe. Die Theorie der Primzahlen kömmt bereits in den Euclidischen Anfangsgründen vor, und eben so findet sich in denselben die Aufgabe von dem grösten gemeinsamen Theiler zwoer Zahlen. Daß aber **Euclid** von der Aufgabe, die Theiler einer fürgegebenen Zahl zu finden, nicht Erwähnung thut, rührt schlechthin nur daher, weil er alles wegläßt, was er nicht auf eine ganz determinirte Art erweisen konn-

konnte. Diese Aufgabe gehört einiger massen unter die Diophantischen; sie ist aber auch zum Theil davon verschieden. Denn ungeachtet die Bedingung, daß die Theiler ganze Zahlen seyn müssen, dabey vorkommt, so bleibt die Frage: wie viele Theiler eine jede Zahl habe, schlechthin unbestimmt; weil man Zahlen findet, die so viele und so wenig Theiler haben, als man immer will. Dieser Umstand aber verursacht, daß man in der Algebra die Frage von Erfindung der Theiler einer Zahl, schwerlich oder gar nicht auf eine Gleichung bringen kann. Man hat dabey kein ander Datum als die Zahl, deren Theiler zu suchen sind. Von dieser weiß man nicht voraus, ob sie Theiler hat, oder nicht. Wolte man demnach die Theiler, oder wenigstens die Factoren der fürgegebenen Zahl als Wurzeln einer Gleichung ansehen; so würde diese Zahl zwar das letzte Glied der Gleichung seyn, als welches allemal das Product der Wurzeln ist. Hingegen bleibt die Anzahl der Glieder dieser Gleichung, die Coefficienten derselben und der Grad der Gleichung ganz unerörtert, bevor nicht die Factoren der fürgegebenen Zahl gefunden sind. Man reicht eben so nicht aus, wenn man sich mit einer quadratischen Gleichung begnügen, und nur zween Factores finden will.

§. 2.

Die Auflösung, die man für diese Aufgabe angiebt, ist, daß man die Zahl, deren Theiler man suchen will, durch jede kleinere Zahl wirklich theile, um dadurch, der Ordnung nach, zu finden, ob sie Theiler habe oder nicht? Ich sage, durch jede kleinere Zahl. Denn ungeachtet seit Euclids Zeiten an schon bewiesen ist, daß man hiebey alle die Zahlen vorbey gehen kann, die nicht Primzahlen sind, so setzt dieses dennoch voraus, daß man die Primzahlen kenne. Es ist aber die Erfindung der Primzahlen eben so schwer, als die Erfindung der Theiler einer Zahl, und man muß eben die Theilungen, die wir vorschlagen, vornehmen, es sey daß man eine Zahl als Primzahl erkennen, oder ihre Theiler finden will. Indessen läßt sich die Arbeit auf eine gedoppelte Art abkürzen. Denn wenn die Theilung mit einer Zahl nicht angeht, so geht sie auch mit jedem vielfachen dieser Zahl nicht an, und eben so viele Theilungen können demnach erspatet werden. Verfährt man auf diese Art von 1 an gerechnet; so behält man allerdings nur jede Primzahlen, womit die Theilung vorgenommen werden muß. Sodann läßt sich ohne Mühe erweisen, daß, wenn eine Zahl Theiler hat, von diesen Theilern eben so viele kleiner sind als ihre Quadratwurzeln, als es deren giebt, die grösser sind, und daß letztere gefunden sind, sobald man erstere gefunden hat, weil jene die Quotienten von diesen sind. Dieser Umstand macht, daß man sich begnügen kann, die Theilung nur mit denen Primzahlen vorzunehmen,

nehmen, welche kleiner sind, als die Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man suchen will.

§. 3.

Indessen wenn leicht diese Zahl sich auf 100000, oder ein Million beläuft; so hat man so viele Theilungen vorzunehmen, daß man es gewiß nicht für die langeweile unternimmt, und ansteht, ob man die Zahl nicht eben so gut ungetheilt lasse, oder aufgebe; zumal da man nicht voraus wissen kann, ob es nicht eine Primzahl ist, und daher gar keine Zerfällung in Factoren zuläßt. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, alle diese Theilungen dergestallt unnöthig zu machen, daß man ohne eine einige davon vorzunehmen, dennoch jede Quotienten und jede Ueberreste finden, und gleichsam in einer Reihe hinschreiben kann. Man sieht leicht, daß dieses in einer gewissen Ordnung, oder nach einem allgemeinen Gesetze geschehen müsse. Und da die Ordnung, wie die Primzahlen auf einander folgen, noch ganz unbekannt ist; so sieht man auch leicht, daß es besser angehen werde, wenn man die Theiler entweder nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, oder wenigstens nach einer andern ganz einfachen Ordnung nimmt. Ich werde indessen die Sache so vortragen, wie ich darauf geleitet worden. Dahin gehören demnach folgende Betrachtungen.

§. 4.

§. 4.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, dergleichen z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. sind, so ist die Theilung damit bald vorgenommen, und die Probe fällt desto leichter aus, weil man für diese Theiler Kennzeichen hat, daran sich bald finden läßt, ob sie in einer Zahl aufgehen, oder nicht. Hat hingegen eine Zahl nur grosse Theiler, so ist dieses eben der Fall, wo man sehr viele Theilungen mit den kleinern Primzahlen vergebens vornehmen muß. Man sieht leicht, daß man hier durch grosse Theiler solche verstehen muß, die von der Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man sucht, wenig unterschieden sind, oder ein geringes Verhältniß zu derselben habe. So z. E. hat die Zahl 479707 nur die zween Theiler 491 und 977. Und diese werden groß genennt, weil sie von der Quadratwurzel 692 + ... kaum um die Hälfte verschieden sind. Hingegen hat die Zahl 479708 allerdings einen grössern Theiler 239854; sie hat aber auch einen sehr kleinen 2. Man kann daher nicht sagen, daß sie lauter grosse Theiler habe.

§. 5.

Wenn demnach eine Zahl A solche Theiler hat, die von ihrer Quadratwurzel nicht viel verschieden sind; so ist es das natürlichste, dieselben auf folgende Art zu suchen. Man ziehe die Quadratwurzel derselben in ganzen Zahlen aus, und sehe zugleich auf den Ueberrest. ~~der~~ R.

A 3 Qua-

Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder die von der nächst kleinern Quadratzahl sey $= a$, und der Ueberrest $= b$, so ist

$$A = aa + b.$$

Es ist klar, daß wenn A selbst eine Quadratzahl ist, sodann $b = 0$ wird. Da wir nun annehmen, A habe solche Theiler, die von a wenig verschieden sind, so nenne man den kleinern $a - x$, den grössern $a + x + y$, so ist

$$A = aa + b = (a - x).(a + x + y)$$

und $$\frac{A}{a-x} = \frac{aa+b}{a-x} = a + x + \frac{xx+b}{a-x}$$
$$= a + x + y$$

demnach wird

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

eine ganze Zahl seyn, welche zu $a + x$ addirt, den Theiler $a + x + y$ giebt. Man sieht zugleich auch, daß der Zähler dieses Bruches $xx + b$ der Ueberrest ist, welcher bleibt, wenn A durch $a - x$ getheilt, $a + x$ mal geht, oder wenn $a - x$ mit $a + x$ multiplicirt, von A abgezogen wird.

§. 6.

Man kann nun, um es im Vorbeygehen anzumerken, vermittelst dieser Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

sprungsweise Zahlen bestimmen, zwischen welche kein

kein Theiler von A fällt. Es sey z. E. die Zahl 150737, so ist die nächst kleinere Quadratzahl 150544, ihre Wurzel $388 = a$, und der Unterschied $b = 193$, demnach

$$150737 = (388)^2 + 193$$

und $$y = \frac{193 + xx}{388 - x}$$

eine ganze Zahl. Hier sieht man nun leicht, daß man x wenigstens $= 14$ nehmen müsse, wenn y auch nur $= 1$ solle werden können; und daß demnach zwischen 388 und $388 - 14 = 374$ kein Theiler der Zahl 150737 vorkomme. Man setze ferner $x = 14 + p$, so findet man

$$y = \frac{389 + 28p + pp}{374 - p} = 1 + \frac{15 + 29p + pp}{374 - p}$$

eine ganze Zahl. Hier sieht man wiederum, daß p wenigstens $= 10$ müsse genommen werden, wenn der Quotient auch nur $= 1$ werden solte. Demnach ist auch zwischen 374 und 364 kein Theiler der Zahl 150737. Man kann eben so fortfahren und $p = 10 + q$ setzen; und so wird man

$$y - 2 = \frac{41 + 50q + qq}{364 - q}$$

erhalten, welches wiederum eine ganze Zahl seyn muß.

§. 7.

Will man hiebey der beständig wieder vorkommenden Reductionen entübrigt seyn, so kehrt

kehrt man die Formel

$$y=\frac{xx+b}{a-x}$$

um, indem man sie in

$$2x+y=\sqrt{(4ay+yy-4b)}$$

verwandelt. Hier muß demnach

$$4ay+yy-4b$$

eine Quadratzahl seyn. Dieses giebt in erst angeführtem Beyspiele, wo $a=388$ und $b=193$ ist,

$$2x+y=\sqrt{(1552y-772+yy)}$$

woraus man für

y =		y =	
1	781 *	11	16421 *
2	2336	12	17996
3	3893 *	13	19573 *
4	5452 *	14	21152 *
5	7013 *	15	22733 *
6	8576	16	24316
7	10141 *	17	25901 *
8	11708 *	18	27488 *
9	13277 *	19	29077 *
10	14848 *	20	30668 *
11	16421 *	21	32261 *
		22	33856 2c.

findet. Ueber diese Zahlen bemerke man:

1. Daß, wenn die zwo ersten gefunden sind, die folgenden durch blosses addiren gefunden werden. Denn ihre Unterschiede sind 1555, 1557, 1559, 1561, 1563 2c. jeder folgende um 2 grösser.

2.° Da diese Zahlen Quadrate seyn sollen, so werden die meisten von denen, die es nicht sind, leicht an den Endigungen erkannt; diese sind mit einem * bezeichnet.

3. Demnach bleiben nur noch die wenige bey $y=2, 6, 12, 16, 22$ 2c. zu untersuchen. Da nun von diesen, wenn man die Probe anstellt, nur die letzte 33856 eine Quadratzahl ist, und 184 zur Wurzel hat, so findet man dadurch

$$2x+y=2x+22=184$$

$$x=81$$

folglich den einen Theiler

$$388-x=307$$

den andern

$$388+x+y=491.$$

Und zugleich weiß man, daß, wenn auch die Zahl 150737 noch andere Theiler haben solte, derselben keiner zwischen 307 und 491 falle.

§. 8.

Die erstbemeldete Kennzeichen der Quadratzahlen, sind folgende:

1. Keine Quadratzahl endet sich mit 2, 3, 7, 8; sondern die Endungen sind

p 01	04	00	16	p 09
i 21	24	025	36	i 29
p 41	44	225	56	p 49
i 61	64	625	76	i 69
p 81	84		96	p 89

wo p überhaupt jede gerade Zahl, i aber jede ungerade bedeutet.

2.° Jede gerade Quadratzahl läßt sich so vielmal durch 4 theilen, bis der Quotient ungerade wird. Geschieht dieses bey einer fürgegebenen geraden Zahl nicht, so ist sie keine Quadratzahl.

3.° Demnach lassen sich auch die zwo letzten Ziffern einer geraden Quadratzahl durch 4 theilen.

4.° Jede ungerade Quadratzahl um 1 vermindert, läßt sich durch 8 theilen.

5.° Demnach auch die drey letzten Ziffern derselben um 1 vermindert, können durch 8 getheilet werden.

6. Jede Quadratzahl, durch 9 getheilt, geht entweder auf, oder sie läßt 1, 4, 7 im Ueberreste.

7. Eine ungerade Quadratzahl, so durch 9 nicht theilbar ist, läßt sich, um 1 vermindert, durch 24 theilen.

Proben

Proben von dieser Art giebt es noch unzählige. Man sieht aber aus dieser angeführten leicht, daß, wenn eine Zahl dieselbe aushält, es sehr wahrscheinlich eine Quadratzahl sey.

§. 9.

Man kann auch von diesen Kennzeichen mehrere verbinden, und dadurch das Aufsuchen der Theiler einer Zahl abkürzen. Um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Zahl 479707 fürgegeben; und es solle gefunden werden, ob, oder welche Theiler sie habe? Zieht man nach den vorhingegebenen Regeln (§. 6.) die Quadratwurzel aus, so findet man

$$479707 = (692)^2 + 843 = a^2 + b$$

demnach $a = 692$
$b = 843$

und folglich

$$2x + y = \sqrt{(2768\,y + yy - 3372)}$$

demnach für

y = 2	2168 *	y = 8	18836
3	4941 *	9	21621 *
4	7716	10	24408 *
5	10493 *	11	27197 *
6	13272 *	12	29988 *
7	16053 *	13	32781 *
		14	35576 ꝛc.

Diese Zahlen solten wiederum Quadratzahlen seyn; es werden aber vermöge der erst angegebenen Kennzeichen, die mit einem * bezeichneten

neten leicht ausgeschlossen, und so bleiben nur noch die zu untersuchen, welche bey $y = 4, 8, 14, 18$ ꝛc. stehen. Um nun auch von diesen noch die meisten auszuschliessen, werden wir das sechste dieser Kennzeichen gebrauchen, daß nemlich jede Quadratzahl durch 9 getheilt, müsse 0, 1, 4, 7 übrig lassen. Man setze demnach

$$y = 10m + 4 \quad \text{und} \quad y = 10m + 8$$

so verwandelt sich der Ausdruck

$$2768y + yy - 3372$$

in folgende beyde

$$27760m + 100m^2 + 7716$$

und $$27840m + 100m^2 + 17836.$$

Diese beyde Ausdrücke theile man durch 9, und behalte nur die Ueberreste, so ist

der erste	der zweyte
$4m + 3 + mm$	$3m + 7 + mm.$

Man setze nun für m die Werthe von 0 bis 8, und indem man wiederum durch 9 dividiret, behalte man ebenfalls nur die Ueberreste, so findet sich

für $m =$		für $m =$	
0	3	0	7*
1	8	1	2
2	6	2	8
3	6	3	7*
4	8	4	8
5	3	5	2
6	0*	6	7*
7	8	7	5
8	0*	8	5

Unter

Unter diesen Ueberresten finden sich nur 0 und 7, welche bey Quadratzahlen vorkommen. Demnach werden für m auch nur die Werthe

6	0
8	3
15	6
17	9
24	12
26 ꝛc.	15 ꝛc.

beybehalten, welches für y die Werthe

64	8
84	38
154	68
ꝛc.	98 ꝛc.

giebt. Wir können aber bey m und den Ausdrücken

$$27760m + 100m^2 + 7716$$
$$27840m + 100m^2 + 17836$$

bleiben. Wird demnach in diesen

$m = 6$	$m = 0$
8	3
15	6
ꝛc.	9 ꝛc.

gesetzt, so findet sich

für		für	
$m = 6$	177976	$m = 0$	17836
$= 8$	236196*	$= 3$	25314
	ꝛc.	$= 6$	188476 ꝛc.

Hier

Hier ist nun $\frac{236196}{4} = \frac{59049}{(9)} = \frac{6561}{(9)}$

$$= \frac{729}{(9)} = \frac{81}{(9)} = \frac{9}{(9)} = 1;$$

demnach die Quadratwurzel $= 2.3.3.3.3.3.3.$
$= 486 = 2x + y$ und $y = 10m + 4 = 84.$

Demnach $2x + 84 = 486$
$x = 201$

$a - x = 692 - 201 = 491$ der erste Theiler,

$a + x + y = 692 + 201 + 84 = 977$ der andere Theiler.

Da die übrige Zahlen 177976, 17836, 25314, 188476 keine Quadratzahlen sind, welches vermittelst der Theilung durch 4 leicht erhellet, so folgt auch, daß die fürgegebene Zahl 479707, wenn sie ausser den beyden Theilern 491 und 977 noch andere hätte, derselben keiner zwischen diese beyde falle.

§. 10.

Um nun wiederum zu dem §. 5. zurücke zu kehren, so haben wir daselbst angemerkt, daß in der Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler dieses Bruches $xx + b$, der Ueberrest ist, welcher bleibt, wenn $a - x$ in A getheilt, $a + x$ mal geht; oder wenn $a - x$, $a + x$ male genommen von A abgezogen wird. Setzt

Setzt man nun für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. so sieht man leicht, daß in

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler immer grösser, der Nenner aber immer kleiner wird, und daß daher nach und nach y grösser als 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. werden muß. Es ist aber, wenn man A durch $a - x$ theilt, der Quotient

$$a + x + y = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

demnach wächst dieser nicht nur um die Einheiten von x, sondern zugleich auch, wiewohl langsamer, um die von y. Ferner sieht man, daß die Ueberreste $xx + b$ anfangs wie die Quadrate von x, und daher ihre Unterschiede wie die ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachsen, bis sie grösser als der Theiler $a - x$ werden. Wird demnach, so bald dieses geschiehet, $a - x$ von $xx + b$ abgezogen, so wird der Quotient um 1 grösser, und die folgenden Ueberreste nehmen nun ebenfalls stärker zu. Denn man setze, das Abziehen geschehe, wo $x = c$ wird, so ist der Ueberrest für $x = c$

vor dem Abziehen	nach dem Abziehen
$cc + b$	$cc + c + b - a$

demnach für die nächstfolgende Stelle $x = c + 1$

$cc + 2c + 1 + b$	$cc + 3c + 2 + b - a$

und daher das Anwachsen dieser Ueberreste

$2c + 1$	$2c + 2$

woraus

woraus man sieht, daß, wenn man das Abziehen wirklich vornimmt, die folgende Ueberreste um 1 stärker anwachsen, als wenn man das Abziehen nicht vorgenommen hätte.

§. 11.

Da sich alles dieses in einem Beyspiele klarer zeigen läßt, so sey die Zahl 10007 durch jede kleinere Zahlen zu theilen, und die zu jedem Theiler gehörige Quotienten und Ueberreste zu finden. Nun ist $10007 = (100)^2 + 7 = aa + b$, demnach $a = 100$ und $b = 7$, folglich

$$y = \frac{7 + xx}{100 - x}$$

Dieses giebt nun folgende Tabelle für jede Theiler $100 - x$.

§. 12.

In dieser Tabelle enthält die Columne A die Theiler $100 - x$. In der Columne B steht neben jedem Theiler der Ueberrest. Die dritte Columne C giebt die Unterschiede, oder die allmählige Zunahme dieser Ueberreste an. Endlich kommen in der vierten Columne D die Quotienten in ganzen Zahlen vor. Alle diese Zahlen lassen sich nun allerdings finden, wenn man, der Ordnung nach, die fürgegebene Zahl 10007 durch 100, 99, 98, 97, 96 ꝛc. theilen will. Da es aber sehr langweilig ist, so viele Theilungen vorzunehmen, so ist es unstreitig

A

A	B	C	D
100	7		100 (I)
99	8	1	101
98	11	3	102
97	16	5	103
96	23	7	104
95	32	9	105
94	43	11	106
93	56	13	107
92	71	15	108
91	88	17	109
90	107	19	110
90	17		111
89	39	22	112
88	63	24	113
87	89	26	114
87	2		115
86	31	29	116
85	62	31	117
84	95	33	118
84	11		119
83	47	36	120
82	85	38	121
82	3		122
81	44	41	123
80	87	43	124
80	7		125
79	53	46	126
78	101	48	127
78	23		128
77	74	51	129
76	127	53	130

A	B	C	D
76	51		131
75	107	56	132
75	32		133
74	91	59	134
74	17		135
73	79	62	136
73	6		137
72	71	65	138
71	138	67	139
71	67		140
70	67	0 (70)	142 (II)
69	71	4	144
69	2		145
68	11	9	147
67	24	13	149
66	41	17	151
65	62	21	153
64	87	25	155
64	23		156
63	53	30	158
62	87	34	160
62	25		161
61	64	39	163
61	3		164
60	47	44	166
59	95	48	168
59	36		169
58	89	53	171
58	31		172
57	32	1 (58)	175 (III)
56	39	7	178
55	52	13	181
54	71	19	184

A	B	C	D
54	17		185
53	43	26	188
52	75	32	191
52	23		192
51	62	39	195
51	11		196
50	57	46	199
50	7		200
49	11	4 (53)	204 (IV)
48	23	12	208
47	43	20	212
46	71	28	216
46	25		217
45	62	37	221
45	17		222
44	19	2 (46)	227 (V)
43	31	12	232
42	53	22	237
42	11		238
41	44	33	243
41	3		244
40	7	4 (44)	250 (VI)
39	23	16	256
38	51	28	262
38	13		263
37	17	4 (41)	270 (VII)
36	35	18	277
35	67	32	284
35	32		285
34	45	13 (47)	293 (VIII)
34	11		294
33	41	30	302

A	B	C	D
33	8		303
32	23	15 (47)	312 (IX)
31	25	2 (33)	322 (X)
30	47	22	332
30	17		333
29	31	14 (43)	344 (XI)
29	2		345
28	11	9 (37)	357 (XII)
27	17	6 (33)	370 (XIII)
26	23	6 (32)	384 (XIV)
25	32	9 (34)	399 (XV)
25	7		400
24	23	16 (40)	416 (XVI)
23	48	25 (48)	433 (XVII)
23	25		434
23	2		435
22	41	39 (61)	453 (XVIII)
22	19		454
21	74	55 (76)	473 (XIX)
21	53		474
21	32		475
21	11		476
20	87	76 (96)	496 (XX)
20	67		497
20	47		498
20	27		499
20	7		500
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

eine

eine beträchtliche Abkürzung, wenn alle diese Zahlen durch blosses Addiren gefunden, und gleichsam nur hingeschrieben werden können, so bald man vermittelst der Ausziehung der Quadratwurzel aus der fürgegebenen Zahl 10007 die drey ersten Zahlen

100 7 100

gefunden hat.

§. 13.

Dieses geht nun nach folgenden Regeln an.

1.° Erhellet aus der (§. 11.) gefundenen Formel $y = \frac{7 + xx}{100 - x}$ daß die ersten Ueberreste nach den Quadraten xx demnach ihre Unterschiede nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachsen.

2.° Daher finden sich in der dritten Columne C. diese ungerade Zahlen, der Ordnung nach, bis auf 19; und bis eben, so weit sind sie in der zweyten Columne B zu dem ersten Ueberreste 7 addirt. Man begreift leicht, daß wenn 10007 eine Quadratzahl wäre, dieser erste Ueberrest = 0 seyn, und demnach die zweyte Columne die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 ꝛc. enthalten würde.

3. Nun findet sich die erstbemeldte Ordnung bey dem Theiler 90 unterbrochen: denn

19 zu 88 addirt, giebt 107. Da nun dieser Ueberrest grösser ist als der Theiler, so wird dieser davon abgezogen, und so bleibt 17, welcher nunmehr kleinere Ueberrest, unter 107 und ebenfals neben 90 gesetzt ist; so, daß auf diese Art 90 zwey mal vorkömmt.

4. Sodann nahmen die Quotienten in der Columne D, welche überhaupt

$$100 + x + y = 100 + x + \frac{7 + xx}{100 - x}$$

sind, bis eben dahin, der Ordnung nach, um 1 zu. Von da an wird jeder um 1 grösser. Denn da 90 mal 110 = 9900 von 10007 abgezogen 107, demnach mehr als 90 übrig läßt; so sieht man leicht, daß sich in der That 90 mal 110 + 1, oder 90 mal 111 abziehen lassen. Und dieses macht, daß der Quotient 111 neben dem zweyten 90 und nicht neben 89 steht, wo er sonst würde zu stehen gekommen seyn, wenn man nicht 90 von 107 abgezogen hätte.

5. Endlich sieht man in der dritten Columne C daß von 19 nicht auf 21, sondern auf 22 gesprungen wird. Dieses würde ebenfalls nicht seyn, wenn nicht 90 wäre von 107 abgezogen worden. Denn so würde man

A	B	C	D
90	107	19	110
89	128	21	111
88	151	23	112
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

gehabt haben. Da aber auf diese Art alle Ueberreste B grösser seyn würden als ihre Theiler A, so müßten diese sämtlich abgezogen werden. Man ziehe sie wirklich ab, so wird jeder Quotient D um 1 grösser, und man erhält

90	17	19	111
89	39	22	112
88	63	24	113
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

demnach eben die Zahlen, wie sie in der Tafel sind. Man verfährt daher kürzer, wenn man, wie es in der Tafel geschehen, 90 von 107 abzieht, und sodann von 19 auf 22 springt.

6.° Da nun die Ueberreste durch das beständige Addiren der Unterschiede, so in der Columne C sind, immer anwachsen; so sieht man leicht, daß im folgenden wiederum müßten Subtractionen vorgenommen werden, so oft ein Ueberrest anfängt grösser als der Theiler zu werden.

7.° Dieses geschieht auch würklich bey den Theilern 87, 84, 82, 80, 78, 76, 75, 74, 73, 71, welche daher eben so wie vorhin

90 doppelt vorkommen, und wo die Unterschiede C ebenfalls um 3 grösser werden.

8.° Bis dahin geht demnach alles nach einem sehr einfachen Gesetze. Hingegen fängt bey dem Theiler 70 eine neue Ordnung an; und dieses geschieht immer wo der Quotient anfängt, doppelt, drey, vier, fünf rc. mal grösser als der Theiler zu werden.

9.° Um diese Abänderungen aber, der Ordnung nach, zu betrachten, so sieht man, daß bey 71 der Ueberrest 138 steht, und demnach 71 davon abgezogen werden muß. Dieses Abziehen macht, daß man in der Columne C von 67 auf 70 kömmt, welche Zahl nun eben so groß ist als der Theiler; demnach wird sie zu dem neben dem 71 stehenden Ueberrest 67 nicht erst addirt, weil man den Theiler 70 von der Summe wiederum abziehen müßte. Ich habe demnach in der Columne C 70 in ( ) eingeschlossen, und 0 voran gesetzt, welches anzeigt, daß der neben 71 stehende Ueberrest 67 nicht vermehrt werde, sondern ebenfalls neben den Theiler 70 zu stehen komme.

10. Da nun aber dadurch der Quotient um 1 grösser wird, so steht auch neben dem Theiler 70 nicht 141, sondern 142.

11. Da ferner bey dem Theiler 70 eine Subtraction geschehen, so solte in der Columne C neben 69 nunmehr 73 stehen; da sich aber auch hievon 69 abziehen läßt, und 4 übrig bleibt, so habe ich auch nur 4 neben 69 gesetzt, welches zu 67 addirt, den Ueberrest 71 giebt. Man sieht auch leicht, daß ebenfalls wegen des Abziehens, der Quotient um 1 grösser, und demnach 144 werden muste.

12. Aus gleichen Gründen nehmen von da an die Quotienten um 2, die Unterschiede C um 4 zu, jedoch mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 4 + 1 oder 5 addirt wird; wie man es bey den Theilern 69, 64, 62, 61, 59 sehen kann.

13. Bis dahin geht es nach der zweyten Ordnung. Die dritte fängt aus ganz ähnlichen Gründen bey 57 an. Denn da würde in der dritten Columne 58 zu stehen kommen, wenn man nach der zweyten Ordnung fortfahren wolte. Da aber 58 bereits grösser ist als der Theiler 57, so habe ich 58 in ( ) eingeschlossen, und dafür 1 gesetzt, um der Subtractionen überhoben zu seyn. Dieses machte aber, daß

nun die Quotienten um 3, die Zahlen C um 6 grösser werden, doch ebenfalls mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 6 + 1 oder 7 addirt wird, wie man es bey den Theilern 54, 52, 51, 50 sehen kann.

14. Auf diese Art geht es auch mit den folgenden Ordnungen, deren Anfang in der Columne D mit römischen Zahlen gezeichnet steht. Bey jeder Ordnung wachsen die Theiler um so viel Einheiten als die Zahl der Ordnung angiebt, die Unterschiede C aber um doppelt so viel. Doch immer mit Vorbehalte des Umstandes, wo eine Subtraction vorgenommen wird.

15. Man sieht auch leicht, daß die Ordnungen immer näher zusammen kommen, oder sich auf weniger Theiler erstrecken. Dieses macht auch, daß man die Aufmerksamkeit wegen der Abwechselung der Zahlen in der Columne C verdoppeln muß.

16. So z. E. bey dem Theiler 29 fängt die XIte Ordnung an, und zugleich wird 29 von 31 abgezogen; dieses macht, daß man in C 2. XI + 1 = 23 zu 14 addiren muß, um (37) zu erhalten. Nun wird der Theiler 28 von (37) abgezogen, und

und

und dieses macht, daß die XIIte Ordnung anfängt. Der Unterschied 37 — 28 = 9 wird vor (37) gesetzt und zu 2 addirt, um den Ueberrest 11 zu haben. Endlich wird 345 + XII = 357 der Quotient; sodann giebt 2. XII + 9 = 24 + 9 = (33), und 33 — 27 = 6, und 6 + 11 = 17. Und wegen des Abziehens fängt die XIIIte Ordnung an; so, daß 357 + XIII = 370 der Quotient wird ꝛc.

17. Bey dem Theiler 23 wird zweymal, bey 21 dreymal, bey 20 viermal subtrahirt; weil die Zahlen C immer grösser, die Theiler aber immer kleiner werden. Ich habe demnach bey 20 abgebrochen, weil nachgehends die Quotienten so schnelle wachsen, daß des subtrahirens kein Ende wird.

18. Noch ist anzumerken, daß es Fälle giebt, wo gleich Anfangs subtrahirt werden muß. So z. E. wenn anstatt der Zahl 10007 die Zahl 10157 wäre vorgenommen worden zu theilen; so würde a = 100, b = 157 gewesen seyn. Demnach hätte man

A	B	C	D
100	157		100
100	57		101
99	59	2	102
98	63	4	103
97 ꝛc.	69 ꝛc.	6 ꝛc.	104 ꝛc.

 und

und folglich gleich Anfangs zu subtrahiren gehabt; und so wären auch die Unterschiede C gleich Anfangs um 1 grösser gewesen.

§. 13.

Das bisher gesagte betrift den Fall, wo man a — x als Theiler ansieht. Man kann aber auch a + x als Theiler ansehen, und da erhält man

$$\frac{A}{a+x} = \frac{aa+b}{a+x} = a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

Setzt man demnach für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 rc. so wird der Theiler a + x der Ordnung nach um 1 grösser, der Quotient

$$a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

der Ordnung nach um 1 kleiner, ausgenommen an denen Stellen wo der Bruch

$$\frac{xx+b}{a+x}$$

anfängt grösser als 1, 2, 3, 4 rc. zu werden, welches aber hier, wo der Theiler immer anwächst, nicht so ofte wie in den vorhergehenden Fall geschieht. Man sieht auch leicht, daß, weil hier der Theiler von a bis auf A = aa + b anwachsen kann, die Berechung von jeden Quotienten und Ueberresten um so viel mehr verlängert wird. Denn so z. E. hatten wir vorhin bey der Zahl 10007 nur die Theiler von 100

100 bis 1; hingegen haben wir hier Theiler die von 100 bis 10006 gehen. Bey noch grössern Zahlen wird dieser Unterschied noch grösser. Uebrigens wird die länger dauernde Arbeit bey den Theilern a + x dadurch leichter gemacht, daß man hier nicht auf so viele Abwechslungen von Ordnungen zu sehen hat. Ich werde nun, um das Verfahren zu erläutern, eben die Zahl 10007 vornehmen, ohne jedoch die daraus erwachsende Tabelle bis zum Ende fortzusetzen, weil die Berechnung von Anfang bis zum Ende gleich einfach bleibt.

§. 14.

Hier sind nun wiederum in A die Theiler, in B ihre Ueberreste, in C deren Unterschiede, in D die Quotienten. Bey dem Theiler 111 geht die erste Subtraction vor, weil der Ueberrest 128 grösser als der Theiler ist. Dadurch wird der Quotient, welcher 89 war, in 90 verwandelt, und in der Columne C geht man nun von 21 nur zu 22. Denn die Subtraction, die mit 111 vorgenommen worden, ist so gut als mit allen folgenden Theilern vorgenommen. Da aber bey den folgenden Theilern nicht 111, sondern der Theiler selbst, oder 112, 113, 114, 115 rc. hätte müssen abgezogen werden, so wird diese Verminderung der dazu gehörenden Ueberreste dadurch erhalten, daß die Unterschiede C nicht 23, 25 rc. sondern nur 22, 24, 26 rc. genommen werden. Eine eben dergleichen

A	B	C	D
100	7		100
101	8	1	99
102	11	3	98
103	16	5	97
104	23	7	96
105	32	9	95
106	43	11	94
107	56	13	93
108	71	15	92
109	88	17	91
110	107	19	90
111	128	21	89
111	17		90
112	39	22	89
113	63	24	88
114	89	26	87
115	117	28	86
115	2		87
116	31	29	86
117	62	31	85
118	95	33	84
119	130	35	83
119	11		84
120	47	36	83
121	85	38	82
122	125	40	81
122	3		82
123	44	41	81
124	87	43	80
125	132	45	79
125	7		80
126	53	46	79
127	101	48	78
128	151	50	77
128	23		78

A	B	C	D
129	74	51	77
130	127	53	76
131	182	55	75
131	51		76
132	107	56	75
133	165	58	74
133	32		75
134	91	59	74
135	152	61	73
135	17		74
136	79	62	73
137	143	64	72
137	6		73
138	71	65	72
139	138	67	71
140	207	69	70
140	67		71
141	137	70	70
142	209	72	69
142	67		70
143	140	73	69
144	215	75	68
144	71		69
145	147	76	68
145	2		69
146	79	77	68
147	158	79	67
147	11		68
148	91	80	67
149	173	82	66
149	24		67
150	107	83	66
151	192	85	65
151	41		66
152	127	86	65

chen Verminderung geht auch bey jeder folgenden Subtraction, z. E. bey den Theilern 115, 119, 122, 125, 128, 131, 133 rc. vor.

§. 15.

Es ist nun die Frage, diese Methode, wodurch unzählige Divisionen in ein blosses addiren und subtrahiren verwandelt werden, bey der Aufgabe von Erfindung der Theiler einer Zahl anzuwenden. Man sieht von selbst, daß es hiebey eigentlich nur auf die Ueberreste ankömmt. Die in erstgegebenem Beyspiele gebrauchte Zahl 10007 ist eine Primzahl; und so ist sich nicht zu verwundern, daß in den Columnen B kein Ueberrest $= 0$ wurde. Denn man sieht leicht, daß dieses geschehen muß, so ofte die Zahl, so man auf diese Art behandelt, wirklich Theiler hat. Man sieht auch leicht, daß der Ueberrest desto früher $= 0$ wird, je näher ein Theiler der Quadratwurzel der Zahl kömmt, deren Theiler man sucht. So z. E. wenn die Zahl 53297 fürgegeben ist

$$53297 = (230^2) + 397,$$

demnach hat man (§. 13. No. 18.)

A	B	C	D
230	397		230
230	167		231
229	169	2	232
228	173	4	233
227	179	6	234
226	187	8	235
225	197	10	236
224	209	12	237
223	223	14	238
223	0		239

Da

Da hier der erste Ueberrest 397 bereits grösser ist als der Theiler, so wird gleich Anfangs die Subtraction vorgenommen, und daher die Unterschiede C um 1 vermehrt, = 2, 4, 6, 8 ꝛc. Bey 223 kömmt die zweyte Subtraction vor. Und da der Ueberrest = 0 wird; so folgert man ohne weiters, daß die fürgegebene Zahl 53297 das Product aus 223 und 239 sey. Es ist für sich klar, daß man ungleich länger würde zu rechnen gehabt haben, wenn man 53297 durch alle Primzahlen von 1 bis 223 hätte wirklich dividiren wollen; und daß demnach durch diese Methode gerade diejenigen Theiler am kürzesten gefunden werden, die man sonst am mühsamsten durch das Dividiren mit Primzahlen findet.

§. 16.

Da man aber nicht voraus wissen kann, ob eine Zahl so schickliche Theiler habe, so würde in jeden andern Fällen der Vortheil dieser Methode nur in der Abkürzung bestehen, wodurch alle solche Divisionen erspahrt werden. Dieser Vortheil ist zwar allemal an sich beträchtlich; es findet sich aber noch ein anderer mit ein, und dieser macht, daß auch dann, wo eine fürgegebene Zahl entweder nur kleine, oder auch gar keine Theiler hat, man nicht nöthig hat, die Theiler sämtlich durch die Musterung gehen zu lassen; sondern, daß man sich mit denen begnügen kann, welche sich in einer dem Bezirke der oben (§. 12. No. 14.) sogenannten ersten Ordnung befinden. Oder, welches einerley ist, man setzt die Tabelle nur so weit fort, bis der Quotient anfängt doppelt grösser als der Theiler zu werden.

§. 17.

Um dieses zu erweisen, und zugleich durch ein Beyspiel aufzuklären, werden wir wiederum die Zahl 10007 vornehmen, und dabey setzen, die Tabelle (§. 11), so wir für dieselbe berechnet, sey nur bis auf den Theiler 70 fortgesetzet. Da nun bis dahin kein Ueberrest B = 0 ist; so sieht man sogleich, daß, wenn auch die Zahl 10007 Theiler haben solte, deren keiner zwischen 70 und 142 falle. Nun sage ich, daß wenn die Zahl 10007 einen Theiler z haben solte, der kleiner als 70 ist, dieses sich an denen bis zu dem Theiler 70 berechneten Theilern, Ueberresten und Quotienten erkennen lasse. Denn was auch immer z für eine Zahl seyn mag, so fällt wenigstens ein Multiplum davon zwischen 70 und 142, oder auch nur zwischen 70 und 140; und zwar wird es

2 z	seyn, wenn z zwischen			35	und	70
4 z	=	=	=	18	=	35
8 z	=	=	=	9	=	17
16 z	=	=	=	5	=	8
32 z	=	=	=	3	=	4
64 z	=	=	=	2	=	2
128 z	=	=	=	1	=	1

fällt.

fällt. Demnach wird ein Multiplum von z, und zwar wenigstens eines, zwischen 70 und 140 fallen, und daher unter denen von 100 bis 70 berechneten Theilern oder unter ihren Quotienten vorkommen. Dazu kommt nun noch der Umstand, daß, wo auch immer dieses Multiplum vorkommt, der in B dabey befindliche Ueberrest, entweder der Theiler z selbst, oder wenigstens ein Multiplum davon ist. Das will nun sagen: wenn unter den bis zu dem Theiler 70 in B befindlichen Ueberresten einer vorkommt, der entweder mit dem Theiler oder mit dem Quotienten commensurabel ist, so, daß entweder der Ueberrest und der Theiler, oder der Ueberrest und der Quotient, oder alle drey sich durch einerley Zahl dividiren lassen; so ist diese Zahl zugleich auch ein Theiler der fürgegebenen Zahl 10007. Geht es aber bey keinem der Ueberreste an, so ist 10007 eine Primzahl. Denn da der Voraussetzung zufolge z in 10007 getheilt werden kann, so wird 10007 durch das Multiplum n z getheilt, entweder ebenfalls aufgehen, oder z, 2 z, 3 z, 4 z .... m z übrig lassen, nemlich eben so vielmal z, als n in (10007:z) getheilt, Einheiten übrig läßt. Lasset uns nun dieses durch einige Beyspiele erläutern.

§. 18.

Es seyn die Theiler der Zahl 217871 zu finden. Hier ist

$$217871 = (466)^2 + 715$$

demnach

A	B	C	D	A	B	C	D
466	715	—	466	455	381	22	478
466	249		467	454	405	24	479
465	251	2	468	453	431	26	480
464	255	4	469	452	459	28	481
463	261	6	470	452	7		482
462	269	8	471	451	38	31	483
461	279	10	472	450	71	33	484
460	291	12	473	449	106	35	485
459	305	14	474	448	143	37	486
458	321	16	475	447	182	39	487
457	339	18	476	446	223	41	488
456	359	20	477				

Da sich nun hier bey dem Theiler 446 der Ueberrest 223 findet, welcher halb so groß als der Theiler ist; so ist 223 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 217871. Nimmt man die Theilung vor, so ist der Quotient $977 = 2 . 488 + 1$. Denn da 446 in 217871 getheilt, $488\frac{1}{2}$ mal geht, so geht die Hälfte von 446 doppelt so viel, oder 977 mal. Will man nun sehen, ob 977 Theiler habe; so ist

$$977 = (31)^2 + 16$$

demnach

A	B	C	D
31	16		31
30	17	1	32
29	20	3	33
28	25	5	34
27	32	7	35
27	5		36
26	15	10	37
25	27	12	38
25	2		39
24	17	15	40
23	34	17	41
23	11		42
22	31	20	43
22	9		44

Diese Tabelle wird nur bis zu den Theiler 22 fortgesetzt, weil schon dieser den doppelt grössern Quotienten 44 giebt. Sie muste aber bis dahin fortgesetzet werden, weil unter den Ueberresten B keiner vorkame, der mit seinen zugehörenden Theiler oder Quotienten commensurabel wäre; demnach ist 977 eine Primzahl.

§. 19.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, so darf man die dafür zu berechnende Tabelle nicht weit fortsetzen, weil ihre Multipla sich bald zeigen. Es seyn z. E. die Theiler der Zahl 391391 zu suchen,

suchen,

suchen, wo man leicht sieht, daß sie deren haben muß, und daß wenigstens 391 und 1001 solche sind. Nun ist

$$391391 = (625)^2 + 766$$

demnach

A	B	C	D
625	766		625
625	141		626
624	143	2	627
623	147	4	628
622	153	6	629
621	161	8	630

Es ist unnöthig die Tabelle weiter fortzusetzen: denn

143 und 624 lassen sich durch 13 theilen.
143 = 627 = = = = 11 =
147 = 623 = = = = 7 =
153 = 622 = = = = 17 =
161 = 621 = = = = 23 =
161 = 630 wiederum durch 7 theilen.

Und da man leicht sieht, daß schon das Product aus 7, 11, 13, 17, 23 die Zahl 391391 geben wird, wie es dieselbe auch wirklich giebt; so sind die einfachsten Factoren dieser Zahl sämtlich gefunden. Da übrigens so viele kleine Factoren ebenfalls viele nicht gar grosse Producte haben, so kann es nicht fehlen, daß nicht auch von diesen die Multipla bald vorkommen solten. Wir wollen zu diesem Ende die Tabelle um etwas weiter fortsetzen:

 621

621	161	8	630
620	171	10	631
619	183	12	632
618	197	14	633
617	213	16	634
616	231	18	635
615	251	20	636
614	273	22	637
613	297	24	638
612	323	26	639
611	351	28	640
610	381	30	641
609	413	32	642
608	447	34	643
607	483	36	644
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Hier findet sich nun bereits, daß

231 und 616 durch 77 oder 7 mal 11,
273 • 637 • • 91 • 7 • 13,
483 • 644 • • 161 • 7 • 23,

und ausser dem wiederum

297 und 638 durch 11,
323 • 639 • • 17,
413 • 609 • • 7 theilbar sind.

§. 20.

So giebt es auch sehr häufig solche Fälle, wo die Theiler unter den Ueberresten so gleich selbst zum Vorschein kommen. Denn man sieht leicht, daß dieses in erst angeführtem Beyspiele schlechthin nur deswegen nicht geschehen, weil

weil die ersten Ueberreste an sich schon viel grösser als die Theiler waren. So z. E. ist

$$35351 = (188)^2 + 7$$

demnach

A	B	C	D
188	7		188
187	8	1	189
186	11	3	190
185	16	5	191
184	23	7	192

Hier findet sich nun schon 184 = 8. 23: so, daß demnach 23 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 35351 ist. Wenn man aber auch weiter fortfährt,

183	32	9	193
182	43	11	194
181	56	13	195
180	71	15	196
179	88	17	197
178	107	19	198
177	128	21	199
176	151	23	200
175	176	25	201
175	1		202
174	29	28	203

so kömmt man auf 174 = 6. 29, so, daß demnach auch 29 ein Theiler von 35351 ist. Da man nun voraus sehen kann, daß der dritte Theiler 53 seyn müsse, so darf man nur noch ein wenig die Rechnung forsetzen, um auf den

Quotienten 212 = 4. 53, oder auf den Theiler A = 159 = 3. 59 zu kommen. Es ist

173	59	30	204
172	91	32	205
171	125	34	206
170	161	36	207
169	199	38	208
169	30		209
168	71	41	210
167	114	43	211
166	159	45	212
165	206	47	213
165	41		214
164	91	50	215
163	143	52	216
162	197	54	217
162	35		218
161	92	57	219
160	151	59	220
159	212	61	221
159	53		222.

Hier kömmt demnach der dritte Factor 53 zum Vorschein.

§. 21.

Es giebt aber auch Fälle, wo man die Rechnung beynahe eben so weit fortsetzen muß, um die Theiler zu finden, als wenn die Zahl eine Primzahl wäre. Dahin gehört z. E. die Zahl 10001, welche $= (100)^2 + 1$ ist. Man hat

hat demnach

A	B	C	D
100	1		100
99	2	1	101
98	5	3	102
97	10	5	103
96	17	7	104
95	26	9	105
94	37	11	106
93	50	13	107
92	65	15	108
91	82	17	109
90	101	19	110
90	11		111
89	33	22	112
88	57	24	113
87	83	26	114
86	111	28	115
86	25		116
85	56	31	117
84	89	33	118
84	5		119
83	41	36	120
82	79	38	121
81	119	40	122

A	B	C	D
81	38		123
80	81	43	124
80	1		125
79	47	46	126
78	95	48	127
78	17		128
77	68	51	129
76	121	53	130
76	45		131
75	101	56	132
75	26		133
74	85	59	134
74	11		135
73	73	62	136
73	0		137
72	65	65	138
71	132	67	139
71	61		140
70	131	70	141
70	61		142

Hier fande sich demnach bis auf A = 73 kein Ueberrest B, welcher mit seinem Theiler, oder mit seinem Quotienten commensurabel gewesen wäre. Bey A = 73, wird B = 0, und demnach

nach ist $10001 = 73 \cdot 137$. Und diese Factoren müssen Primzahlen seyn.

§. 22.

Wir können nun noch zugleich anmerken, daß wenn man eine solche Tabelle für eine Zahl bis dahin berechnet hat, wo der Quotient doppelt so groß wird, als der Theiler, eine solche Tabelle zugleich auch für Zahlen dienen kann, die um einige Einheiten, oder auch um mehrere grösser oder kleiner sind als die Zahl, für welche die Tabelle ist berechnet worden. So z. E. wenn die Theiler der Zahl 10003 zu finden sind; so werden in der erst für die Zahl 10001 berechneten Tabelle, alle Ueberreste B um 2 grösser. Alles Uebrige bleibt. Man sieht sodann bald, daß z. E. der dritte Ueberrest 5 sich in $5 + 2 = 7$ verwandelt, und daß der dabey stehende Theiler $A = 98$ durch 7 getheilet werden kann, folglich 7 ein Theiler von 10003 ist. Vergleicht man die sämtlichen Ueberreste, jeder um 2 vergrössert, mit ihren Theilern und Quotienten, so findet man sie nur in denen Stellen commensurabel, wo sie Multipla von 7 sind, und daraus läßt sich folgern, daß $\frac{10003}{7}$ $= 1429$ eine Primzahl sey.

§. 23.

Hätte man hingegen die Zahl 10005 vorgenommen, von welcher man zwar ohnehin siehet, daß sie wenigstens durch 5 und 3 getheilt werden kann; so würden alle Ueberreste um 4 vergrössert werden müssen. Dieses verwandelt den Ueberrest 83 in $83 + 4 = 87$, so, daß er dem Theiler gleich wird. Demach läßt sich 10005 durch 87 theilen. Eben so wird der Ueberrest 111 in $111 + 4 = 115$ verwandelt, und daher dem Quotienten gleich. Daher ist auch 115 ein Theiler von 10005. Mehr hat man nicht nöthig zu suchen, weil $10005 = 87 \cdot 115 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29$ ist. Nimmt man eben diese Vergleichung mit 10007 vor, in dem man zu jeden Ueberresten 6 addirt; so findet sich keiner weder mit seinem Theiler noch mit dem Quotienten commensurabel, demnach ist 10007 eine Primzahl.

II.
Vorschlag
die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen.

§. 1.

Die vorhergehende Abhandlung enthält zwar einige Methoden, wodurch die Theiler der Zahlen mit leichter Mühe gefunden werden können. Wenn sich aber auch noch kürzere Methoden finden liessen, so werden dennoch solche Tabellen, worinne die Zahlen bereits in ihre Factoren aufgelöst sind, immer angenehm seyn, weil sie weiter nichts als das blosse Aufschlagen fordern. Man hat aus gleichem Grunde unzählige andere Tabellen, z. E. die von Quadrat und Cubiczahlen, die trigonometrischen und logarithmischen, die astronomischen rc. bey allen war die Bequemlichkeit des Gebrauches ein zureichender Grund, warum man sich Zeit und Mühe, sie ein für allemale zu berechnen, nicht hat verdriessen lassen.

§. 2.

Nun hat es zwar an Tabellen, in Absicht auf die Theiler der Zahlen, eben nicht ganz gefehlt. Sie sind aber lange nicht so bekannt worden, als sie es hätten werden sollen, und es trug sich sogar dabey zu, daß sie mehrmalen ganz von neuem berechnet worden. So z. E. wuste **Poetius**, daß dergleichen bereits im vorigen Jahrhundert in England herausgekommen, und 1717 vom Herrn *de Traytorrens d'Yverdun* der Parisischen Akademie ein Project von solchen Tabellen übergeben worden. Allein da ihm weiter nichts davon zu Gesichte kam, so berechnete er sie von neuem, und gab sie, wiewohl etwas abgekürzt, 1728 in seiner **Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra** heraus. Eben dieses begegnete dem **Peter Jäger** mit seinen Primzahlen, die **Krüger** seinen **Gedanken über die Algebra** angehenkt. Selbst **Anjema**, dessen **Verzeichnis der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000** nach seinem Tode 1767 in einem ziemlichen Quartbande zu Leyden herausgekommen, und seine Herausgeber scheinen von bereits vorhanden gewesenen Tabellen nichts gewust zu haben, da in der Vorrede das Werk als das erste und einige in seiner Art angerühmet wird. Solche Erscheinungen in der gelehrten Welt sind um desto merkwürdiger, weil unstreitig die Tabellen von den Theilern der Zahlen eben so gemein seyn solten, als es die trigonometrischen und logarithmischen sind. Denn wer diese zu gebrauchen weiß, wird ganz gewiß auch jene brauchbar finden.

§. 3.

§. 3.

Es mögen indessen verschiedene Ursachen seyn, warum die Tabellen von den Theilern der Zahlen weniger gemein sind. Sowohl D. Pell in England, als Poetius in Teutschland haben sich begnügt, sie ihren Anleitungen zur Algebra und Rechenkunst einzuverleiben, anstatt daß sie besonders hätten herausgegeben werden sollen. Eben so finden sie sich in dem 2ten Bande des 1742 zu Leipzig herausgekommenen mathematischen Lexicons unter sehr viel andern Tabellen. Anjema war demnach meines Wissens der erste, der sie vollständiger zu machen und besonders herauszugeben gedachte. Da er aber durch den Todt an der Arbeit gehindert worden, so erstrecken sich seine Tabellen auch nur bis auf 10000. Und es ist unstreitig, daß wenn sie eben so vollständig bis auf 100000 hätten fortgesetzt werden sollen, das Werk zu einem ungeheuren Folianten angewachsen wäre, und vielleicht sodann keinen Verleger würde gefunden haben.

§. 4.

Es läßt sich aber ein solcher Foliant ganz bequem auf 10 Folioseiten abkürzen, wenn man sich mit dem nöthigsten begnügen und auf die schicklichste Einrichtung denken will. Anjema hat seine Tafeln dadurch sehr weitläuftig gemacht, daß er alle Zahlen von 1 bis 10000 mitgenommen, und alle Theiler aufgezeichnet hat.

hat. Da es aber überhaupt genug ist, wenn man die eigentlichen Factoren einer Zahl weiß, weil aus diesen alle übrige Theiler leicht gefunden werden; so sieht man ohne Mühe, daß dadurch eine beträchtliche Abkürzung der Tafeln erhalten werden kann.

§. 5.

Zu dieser Abkürzung kömmt noch eine andere, welche man erhält, wenn aus der Tafel alle die Zahlen wegbleiben, die sich durch 2, 3, oder 5 theilen lassen. Denn solche Zahlen lassen sich ohne Mühe erkennen. Und werden sie, so vielmal es angeht, durch 2, 3, 5 getheilt, so ist es immer genug, wenn man aus der Tabelle sehen kann, ob der letzte Quotient noch ferners in Factoren zerfällt werden kann.

§. 6.

Auf diese Art aber werden von 30 Zahlen nur 8 beybehalten, so, daß man für 30000 Zahlen nicht mehr Raum gebraucht, als man sonst nur für 8000 würde gebraucht haben. Denn da 30 die kleinste Zahl ist, die sich durch 2, 3, 5 theilen läßt, so folgt, daß jede Zahl die durch 30 getheilt, entweder 0, oder einen durch 2, 3, 5 thielbaren Rest übrig läßt, ebenfalls durch 2, 3, 5 getheilt werden kann; und hinwiederum daß auch letzteres nicht angeht, wenn ersteres nicht statt findet. Nun findet dieses nur in denen Fällen nicht statt, wo eine Zahl, wenn

wenn sie durch 30 getheilt wird, eine der Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 zum Reste läßt. Und so hat man auch nur unter jeden 30 Zahlen diese achterley Fälle beyzubehalten.

§. 7.

Es verursacht aber die decimale Einrichtung des Zahlengebäudes, daß man anstatt 30 zum Grunde zu legen, bequemer 300 zum Grunde legt, und daher nur die Zahlen beybehält, welche, wenn sie durch 300 getheilt werden, eine von folgenden Zahlen

1	31	61	91	121	151	181	211	241	271
7	37	67	97	127	157	187	217	247	277
11	41	71	101	131	161	191	221	251	281
13	43	73	103	133	163	193	223	253	283
17	47	77	107	137	167	197	227	257	287
19	49	79	109	139	169	199	229	259	289
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299

zum Ueberreste haben. Diese sind es allein, welche sich durch 2, 3, 5 nicht theilen lassen.

§. 8.

Diese Ueberreste zeigen nun ebenfalls an, in welcher Ordnung die beyzubehaltende Zahlen, in Absicht auf ihre zwo letzte Ziffern, auf einander folgen, weil diese Ordnung, so oft man um 300 weiter schreitet, allemal wiederkehrt. Es wird sich nun hieraus begreiflich machen lassen, wie es möglich gewesen, den ganzen Anjema-

schen

schen Quartband auf die beygefügte Folioseite abzukürzen.

§. 9.

Denn einmal war es genug, die zwo letzte Ziffern erst angeführter Ueberreste (§. 7.) in der vordersten Columne herunter zu schreiben, und an den zwo Stellen, wo ein neues hundert anfängt, einen Zwischenraum zu lassen, in welchem der Queere nach die ganzen hunderte hintereinander, und zwar jedes über seine Columne, geschrieben werden konnten. Dadurch, und wegen des nach den 3000 und 6000 herunterlauffenden Zwischenraumes findet sich die Tabelle in 9 Quadrate eingetheilt, und dadurch erhielt die Tabelle theils eine bessere Gestalt, theils auch wurde dadurch das Aufsuchen erleichtert. Man sieht leicht, daß die Theiler jeder Zahl da zu suchen sind, wo man von den hunderten herunterwärts, und von den Ueberresten in der ersten Columne des Quadrats, über welchen die hunderter stehen, hinterwerts fährt, bis man zusammen trift.

§. 10.

So z. E. wenn die Zahl 4361 fürgegeben, so findet sich 4300 über der vierten Columne des mittlern Quadrats. Fährt man demnach von 4300 herunterwerts, und von 61 hinterwerts, so trift man da zusammen, wo die Zahlen 7. 7. 89 stehen. Und dieses sind die Factoren, aus deren Multiplication die Zahl 4361 erwächst.

§. 11.

§. 11.

Trift es sich bey solchen Aufsuchen, daß man auf eine leere Stelle kömmt, so ist dieses eine Anzeige, daß die aufgesuchte Zahl eine Primzahl ist. So z. E. wenn man 4363 aufgesucht hätte, so würde man auf die leere Stelle gefallen seyn, welche unmittelbar unter den für 4361 gefundenen Factoren 7. 7. 81 steht.

§. 12.

Trift man aber eine Zahl bey dem Aufsuchen gar nicht an; so kann man schliessen, daß sie durch 2, 3 oder 5 getheilt werden kann. So z. E. wenn man (um bey gleicher Columne zu bleiben) die Zahl 4371 hätte aufsuchen wollen, so würde man in der Columne der Ueberreste die zwo letzten Ziffern 71 nicht gefunden haben. Da nun 4371 weder gerade ist, noch zur letzten Ziffer eine 0 oder 5 hat, so bleibt nur, daß sie durch 3 getheilt werden kann. Nimmt man die Theilung vor; so erhält man den Quotient 1457, welcher unter 1400 und hinter 57 aufgesucht, auf die Factoren 31, 47 verweiset, so, daß demnach die Factoren der Zahl 4371 die Zahlen 3, 31, 47 sind.

§. 13.

Da nun die Tabelle sich bis auf 10199 oder 10200 erstreckt, so sieht man, daß man dadurch die Theiler der Zahlen von 1 bis auf 10200 nebst den Primzahlen auf eine sehr geschmei-

geschmeidige Art beysammen hat, und sie gleichsam mit einem Anblicke übersehen kann. Auch hat man bey dem Aufsuchen nicht nöthig lange zu blättern, weil sowohl die hunderter als die zwo letzte Ziffern jeder fürgegebenen Zahl gleich in die Augen fallen.

§. 14.

Ungeachtet sich nun die Tabelle nur bis auf 10200 erstreckt, so dient sie doch auch für grössere Zahlen, die, wenn sie durch 2, 3, 5 können getheilt werden, sich so weit herunter bringen lassen, daß der letzte Quotient kleiner als 10200 ist. Da dieses aber nicht mit jeden grössern Zahlen angeht, so werde ich auch den Vortheil nicht mehr erheben, als er es verdient.

§. 15.

Vielmehr werde ich anmerken, daß ich die Tabelle vorzüglich deswegen durch den Druck bekannt mache, daß etwann jemand durch die so geschmeidige Einrichtung derselben sich bewegen lasse, noch 9 andere, oder wenn er sich einen recht unsterblichen Namen machen will, noch 99 andere beyzufügen. Denn so würde man im letztern Fall, auf die geschmeidigste Art, die nur immer möglich ist, die Theiler jeder Zahlen haben die unter einer Million, oder unter 1020000 sind, und das wäre doch immer genug. Im erstern Fall hätte man sie bis auf 102000, und man würde immer 10 mal weiter damit reichen, als mit der gegenwärtigen, die nur bis auf 10200 geht.

§. 16.

Da es aber schwerlich zu hoffen steht, daß zu dieser Tabelle noch 99 andere hinzugerechnet werden, wiewohl die Arbeit weder so groß, noch so weitläuftig seyn würde, als sie es bey den trigonometrischen Tafeln war, so werde ich es bey den 102000 bewenden lassen, und nun noch angeben, wie die Berechnung merklich erleichtert werden könne.

§. 17.

Die Quadratwurzel von 102000 ist etwas weniger als 320, demnach wenn eine Zahl, die kleiner als 102000 ist Theiler hat, so hat sie nothwendig einen Theiler der kleiner als 320 ist.

§. 18.

Da ferners die durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen wegbleiben, so ist 7 die kleinste Primzahl die unter den Factoren vorkömmt. Theilt man demnach 102000 durch 7, so ist der Quotient 14571. Und so ist es zu Verfertigung der Tabelle genug, wenn man die Primzahlen bis auf 14571 weiß. Denn grössere kommen unter den Factoren nicht vor, wenn die Tabelle nur bis auf 102000 fortgesetzt wird.

§. 19.

Theilt man ferners 10200 durch 7, so ist der Quotient 1457. Und hieraus folgt, daß alle durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahlen, die zwischen 1457 und 14571 fallen, durch 7 müssen multiplicirt werden. Diese Zahlen wären nun sämtlich in der Tafel enthalten, wenn sie bereits bis auf 14571 fortgesetzt wäre. Da sie sich nun vorerst auf eben die Art bis dahin fortsetzen läßt, wie sie sodann bis auf 102000 fortgesetzt wird; so werde ich annehmen, daß sie bereits bis auf 14571 fortgesetzt sey. Denn so wie sie ist, läßt sie sich bis auf 7 mal 10200, oder 71400, und von da an bis auf 71400 mal 7, oder 499800 fortsetzen.

§. 20.

Nun ist vor allen Dingen nöthig, daß, so weit man die Tafel fortsetzen will, man die Eintheilung in Quadrate und Columnen gleich anfangs mache, und die hunderter und die zwo letzte Ziffern auf eben die Art, wie in der hier vorgelegten Tabelle hinschreibe, damit sodann die Factoren sogleich können an ihren Ort eingetragen werden.

§. 21.

So z. E. um die Columne von 40000 bis 40100 auszufüllen, werden die in der Tafel vorkommende Zahlen von 7 an bis zu der Quadratwurzel von 40100 gebraucht. Man theilt

40000 durch 7, so ist der Quotient $5714\frac{2}{7}$. Die nächst grössere Zahlen in der Tafel sind nebst ihren Factoren

5717
5719 = 7. 19. 43
5723 = 59. 97
5729 = 17. 337 2c.

diese mit 7 multiplicirt, geben nun

40019 = 7. 5717
40033 = 7. 7. 19. 43
40061 = 7. 59. 97
40103 = 7. 17. 337 2c.

An die Stelle von diesen Producten werden nun die neben denselben stehenden Factoren eingetragen. Sodann verfährt man eben so mit 11 als der nächst grössern Zahl. Denn 40000 durch 11 getheilt, giebt $3636\frac{4}{11}$. Die nächst grössere Zahlen in der Tafel sind nebst ihren Factoren

3637
3641 = 11, 331
3643
3647 = 7. 521 2c.

diese durch 11 multiplicirt, geben

40007 = 11. 3637
40051 = 11. 11. 331
40073 = 11. 3643
40117 = 7. 11. 521 2c.

Eben so verfährt man auch mit 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 2c. das will sagen,

sagen, mit allen Primzahlen bis zu der Quadratwurzel von 40100, wenn man nemlich nur bis auf diese Zahl die Tafel ausfüllen will. Man füllt sie aber, wie vorhin gesagt, entweder nur bis auf 14571, oder auch gar bis auf 71400, und sodann vollends bis auf 102000 aus. Die Stellen, die zuletzt unausgefüllt bleiben, sind die von Primzahlen.

§. 22.

Auf die erst beschriebene Art habe ich die Tafel von 10000 bis auf 10200 ausgefüllt, nachdem ich das übrige aus des *Poëtii* anatomia numerorum genommen, und zugleich in die 20 Druck- und Rechenfehler verbessert, die ich wegen der Einrichtung der hier beygefügten Tafel, leicht entdecken konnte.

Tafel der Primzahl und der Factoren von denen Zahlen die unter 10200, und durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind.

	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	3000
1	—	7 43	—	17 53	—	19 79	—	11 191	7 7 7 7	37 73	—
7	—	—	—	—	17 71	11 137	13 139	7 7 43	29 83	—	31 97
11	—	—	13 47	—	7 173	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	11 83	—	17 89	7 7 37	—	19 127	—	23 131
17	—	—	—	7 131	—	37 41	23 79	29 73	—	11 13 19	7 431
19	—	11 29	—	—	23 53	7 7 31	17 107	13 163	41 59	—	—
23	—	17 19	7 89	13 71	—	—	—	11 193	—	7 389	—
29	—	7 47	17 37	—	—	11 139	31 59	—	7 347	—	13 233
31	—	—	—	7 7 19	—	—	—	—	11 13 17	—	7 433
37	—	—	7 7 13	—	—	29 53	11 167	—	—	7 17 23	—
41	—	11 31	—	—	17 73	23 67	7 263	—	—	—	—
43	—	7 49	—	23 41	11 113	—	19 97	—	7 349	13 211	17 179
47	—	—	—	—	29 43	7 13 17	—	19 113	—	41 67	11 277
49	7 7	—	11 59	13 73	—	—	43 43	7 303	31 79	—	—
53	—	—	—	—	7 179	—	17 109	—	11 223	—	43 71
59	—	—	—	7 139	—	—	11 13 13	17 127	—	31 89	7 19 23
61	—	19 19	—	31 31	13 97	7 223	—	—	23 107	11 251	—
67	—	—	23 29	—	7 181	—	—	11 197	—	—	—
71	—	7 53	11 61	—	31 41	—	—	13 167	7 353	17 163	37 83
73	—	—	—	7 139	19 67	11 11 13	—	41 53	—	47 59	7 439
77	7 11	13 29	—	—	—	19 83	—	7 311	—	—	17 181
79	—	—	7 97	11 89	—	—	—	—	37 67	7 397	—
83	—	—	—	—	—	—	7 269	37 59	13 191	11 11 23	—
89	—	—	13 53	23 43	—	7 227	—	11 199	19 131	—	—
91	7 13	17 23	—	—	—	37 43	31 61	7 313	47 53	—	11 281
97	—	—	17 41	—	—	—	7 271	13 13 13	11 227	—	19 163

	3300	3600	3900	4200	4500	4800	5100	5400	5700	6000	6300
1	—	13 277	47 83	—	7 643	—	—	11 491	—	17 353	—
7	—	—	—	7 601	—	11 19 23	—	—	13 439	—	7 17 53
11	7 11 43	23 157	—	—	13 347	17 283	19 269	7 773	—	—	—
13	—	—	7 13 43	11 383	—	—	—	—	29 197	7 859	59 107
17	31 107	—	—	—	—	—	7 17 43	—	—	11 547	—
19	—	7 11 47	—	—	—	61 79	—	—	7 19 43	13 463	71 89
23	—	—	—	41 103	—	7 13 53	47 109	11 17 29	59 97	19 317	—
29	—	19 191	—	—	7 647	11 439	23 223	61 89	17 337	—	—
31	—	—	—	—	23 197	—	7 733	—	11 521	37 163	13 487
37	47 71	—	31 127	19 223	13 349	7 691	11 467	—	—	—	—
41	13 257	11 331	7 563	—	19 239	47 103	53 97	—	—	7 863	17 373
43	—	—	—	—	7 11 59	29 167	37 139	—	—	—	—
47	—	7 521	—	31 137	—	37 131	—	13 419	7 821	—	11 577
49	17 197	41 89	11 359	7 607	—	13 373	19 271	—	—	23 263	7 907
53	7 479	13 281	59 67	—	29 157	23 211	—	7 19 41	11 523	—	—
59	—	—	37 107	—	47 97	43 113	7 11 67	53 103	13 443	73 83	—
61	—	7 523	17 233	—	—	—	13 397	43 127	7 823	11 19 29	—
67	7 13 37	19 193	—	17 251	—	31 157	—	7 11 71	73 79	—	—
71	—	—	11 19 19	—	7 653	—	—	—	29 199	13 467	23 277
73	—	—	29 137	—	17 269	11 443	7 739	13 421	23 251	—	—
77	11 307	—	41 97	7 13 47	23 199	—	31 167	—	53 109	59 103	7 911
79	31 109	13 283	23 173	11 389	19 241	7 17 41	—	—	—	—	—
83	17 199	29 127	7 569	—	—	19 257	71 73	—	—	7 11 19	13 491
89	—	7 17 31	—	—	13 353	—	—	11 499	7 827	—	—
91	—	—	13 307	7 613	—	67 73	29 179	17 17 19	—	—	7 11 83
97	43 79	—	7 571	—	—	59 83	—	23 239	11 17 31	7 13 67	—

	6600	6900	7200	7500	7800	8100	8400	8700	9000	9300	9600	9900
1	7 23 41	67 103	19 379	13 577	29 269	—	31 271	7 11 113	—	71 131	—	—
7	—	—	—	—	37 211	11 11 61	7 1201	—	—	41 217	13 739	—
11	11 601	—	—	7 29 37	73 107	—	13 647	31 281	—	—	7 1373	11 17 53
13	17 389	31 223	—	11 683	13 601	7 19 61	47 179	—	—	67 139	—	23 431
17	13 509	—	7 1031	—	—	—	19 443	23 379	71 127	7 11 11 11	59 163	47 211
19	—	11 17 37	—	73 103	7 1117	23 353	—	—	29 311	—	—	7 13 109
23	37 179	7 23 43	31 233	—	—	—	—	11 13 61	7 1289	—	—	—
29	7 947	13 13 41	—	—	—	11 739	—	7 29 43	—	19 491	—	—
31	19 349	29 239	7 1033	17 443	41 191	47 173	—	—	11 821	7 31 43	—	—
37	—	7 991	—	—	17 461	79 103	11 13 59	—	7 1291	—	23 419	19 523
41	29 229	11 631	13 557	—	—	7 1163	23 367	—	—	—	31 311	—
43	7 13 73	53 131	—	19 397	11 23 31	17 479	—	7 1249	—	—	—	61 163
47	17 17 23	—	—	—	7 19 59	—	—	—	83 109	13 719	11 877	7 7 7 29
49	61 109	—	11 659	—	47 167	29 281	7 17 71	13 673	—	—	—	—
53	—	17 409	—	7 13 83	—	31 263	79 107	—	11 823	47 199	7 7 197	37 269
59	—	—	7 17 61	—	29 271	41 199	11 769	19 461	—	7 7 191	13 743	23 433
61	—	—	53 137	—	7 1123	—	—	—	13 17 41	11 23 37	—	7 1423
67	59 113	—	13 13 43	7 23 47	—	—	—	11 797	—	17 19 29	7 1381	—
71	7 953	—	11 661	67 113	17 463	—	43 197	7 7 179	47 193	—	19 509	13 13 59
73	—	19 367	7 1039	—	—	11 743	37 229	31 283	43 211	7 13 103	17 569	—
77	11 607	—	19 383	—	—	13 17 37	7 7 173	67 131	29 313	—	—	11 907
79	—	7 977	29 251	11 13 53	—	—	61 139	—	7 1291	83 113	—	17 587
83	41 163	—	—	—	—	7 7 167	17 499	—	31 293	11 853	23 421	67 149
89	—	29 241	37 197	—	7 7 7 23	19 431	13 653	11 17 47	61 149	41 229	—	7 1427
91	—	—	23 317	—	13 607	—	7 1213	59 149	—	—	11 881	97 103
97	37 181	—	—	71 107	53 149	7 1171	29 293	19 463	11 827	—	—	13 769

	100	400	700	1000	1300	1600	1900	2200	2500	2800	3100
1	—	—	—	7 11 13	—	—	—	31 71	41 61	—	7 443
3	—	13 31	19 37	17 59	—	7 229	11 173	—	—	—	29 107
7	—	11 37	7 101	19 53	—	—	—	—	23 109	7 401	13 239
9	—	—	—	—	7 11 17	—	23 83	47 47	13 193	53 53	—
13	—	7 59	23 31	—	13 101	—	—	—	7 359	29 97	11 283
19	7 17	—	—	—	—	—	19 101	7 313	11 229	—	—
21	11 11	—	7 103	—	—	—	17 113	—	—	7 13 31	—
27	—	7 61	—	13 79	—	—	41 47	17 131	7 19 19	11 257	53 59
31	—	—	17 43	—	11 11 11	7 233	—	23 97	—	19 149	31 101
33	7 19	—	—	—	31 43	23 71	—	7 11 29	17 149	—	13 241
37	—	19 23	11 67	17 61	7 191	—	13 149	—	43 59	—	—
39	—	—	—	—	13 103	11 149	7 277	—	—	17 167	43 73
43	11 13	—	—	7 149	17 79	31 53	29 67	—	—	—	7 449
49	—	—	7 107	—	19 71	17 97	—	13 173	—	7 11 37	47 67
51	—	11 41	—	—	7 193	13 127	—	—	—	—	23 137
57	—	—	—	7 151	23 59	—	19 103	37 61	—	—	7 11 41
61	7 23	—	—	—	—	11 151	37 53	7 17 19	13 197	—	29 109
63	—	—	7 109	—	29 47	—	13 151	31 73	11 233	7 409	—
67	—	—	13 59	11 97	—	—	7 281	—	17 151	47 61	—
69	13 13	7 67	—	—	37 37	—	11 179	—	7 367	19 151	—
73	—	11 43	—	29 37	—	7 239	—	—	31 83	13 13 17	19 167
79	—	—	19 41	13 83	7 197	23 73	—	43 53	—	—	11 17 17
81	—	13 37	11 71	23 47	—	41 41	7 283	—	29 89	43 67	—
87	11 17	—	—	—	19 73	7 241	—	—	13 199	—	—
91	—	—	7 113	—	13 107	19 89	11 181	29 79	—	7 7 59	—
93	—	17 29	13 61	—	7 199	—	—	—	—	11 263	31 103
97	—	7 71	—	—	11 127	—	—	—	7 7 53	—	23 139
99	—	—	17 47	7 157	—	—	—	11 11 19	23 113	13 223	7 457

	3400	3700	4000	4300	4600	4900	5200	5500	5800	6100	6400
1	19 179	—	—	11 17 23	43 107	13 13 29	7 743	—	—	—	37 173
3	41 83	7 23 23	—	13 331	—	—	11 11 43	—	7 829	17 359	19 337
7	—	11 337	—	59 73	17 271	7 701	41 127	—	—	31 197	43 149
9	7 487	—	19 211	31 139	11 419	—	—	7 787	37 157	41 149	13 17 29
13	—	47 79	—	19 227	7 659	17 17 17	13 401	37 149	—	—	11 11 53
19	13 263	—	—	7 617	31 149	—	17 307	—	11 23 23	29 211	7 7 131
21	11 311	61 61	—	29 149	—	7 19 37	23 227	—	—	—	—
27	23 149	—	—	—	7 661	13 379	—	—	—	11 557	—
31	47 73	7 13 41	29 139	61 71	11 421	—	—	—	7 7 7 17	—	59 109
33	—	—	37 109	7 619	41 113	—	—	11 503	19 307	—	7 919
37	7 491	37 101	11 367	—	—	—	—	7 7 113	13 449	17 19 19	41 157
39	19 181	—	7 577	—	—	11 449	13 13 31	29 191	—	7 877	47 137
43	11 313	19 197	13 311	43 101	—	—	7 7 107	23 241	—	—	17 379
49	—	23 163	—	—	—	7 7 101	29 181	31 179	—	11 13 43	—
51	7 17 29	11 11 31	—	19 229	—	—	59 89	7 13 61	—	—	—
57	—	13 17 17	—	—	—	—	7 751	—	—	47 131	11 587
61	—	—	31 131	7 7 89	59 79	11 11 41	—	67 83	—	61 101	7 13 71
63	—	53 71	17 239	—	—	7 709	19 277	—	11 13 41	—	23 281
67	—	—	7 7 83	11 397	13 359	—	23 229	19 293	—	7 881	29 223
69	—	—	13 313	17 257	7 23 29	—	11 479	—	—	31 199	—
73	23 151	7 7 7 11	—	—	—	—	—	—	7 839	—	—
79	7 7 71	—	—	29 151	—	13 383	—	7 797	—	37 167	11 19 31
81	59 59	19 199	7 11 53	13 337	31 151	17 293	—	—	—	7 883	—
87	11 317	7 541	61 67	41 107	43 109	—	17 311	37 151	7 29 29	23 269	13 499
91	—	17 223	—	—	—	7 23 31	11 13 37	—	43 137	41 151	—
93	7 499	—	—	23 191	13 19 19	—	67 69	7 17 47	71 83	11 563	43 151
97	13 269	—	17 241	—	7 11 61	19 263	—	29 193	—	—	73 89
99	—	29 131	—	53 83	37 127	—	7 757	11 509	17 347	—	67 97

	6700	7000	7300	7600	7900	8200	8500	8800	9100	9400	9700	10000
1	—	—	7 7 149	11 691	—	59 139	—	13 677	19 479	7 17 79	89 109	73 137
3	—	47 149	67 109	—	7 11 29	13 631	11 773	—	—	—	31 313	7 1429
7	19 353	7 7 11 13	—	—	—	29 283	47 181	—	7 1301	23 409	17 571	—
9	—	43 163	—	7 1087	11 719	—	67 127	23 383	—	97 97	7 19 73	—
13	7 7 137	—	71 103	23 331	41 193	43 191	—	7 1259	13 701	—	11 883	17 19 31
19	—	—	13 567	19 401	—	—	7 1217	—	11 829	—	—	43 233
21	11 13 47	7 17 59	—	—	89 89	—	—	—	7 1303	—	—	11 911
27	7 31 31	—	17 431	29 263	—	19 433	—	7 13 97	—	11 857	71 137	37 271
31	53 127	79 89	—	13 587	7 11 103	—	19 449	—	23 397	—	37 263	7 1433
33	—	13 541	—	17 449	—	—	7 23 53	11 11 73	—	—	—	79 127
37	—	31 227	11 23 29	7 1091	—	—	—	—	—	—	7 13 107	—
39	23 293	—	41 179	—	17 467	7 11 107	—	—	13 19 37	—	—	—
43	11 613	—	7 1049	—	13 13 47	—	—	37 239	41 233	7 19 71	—	11 11 83
49	17 397	7 19 53	—	—	—	73 113	83 103	—	7 1307	11 859	—	13 773
51	43 157	11 641	—	7 1093	—	37 223	17 503	53 167	—	13 727	7 7 199	19 23 23
57	29 233	—	7 1051	13 19 31	73 109	23 359	43 199	17 521	—	7 7 193	11 887	89 117
61	—	23 307	17 433	47 163	19 419	11 751	7 19 67	—	—	—	43 227	—
63	—	7 1009	37 199	79 97	—	—	—	—	7 7 11 17	—	13 751	29 347
67	67 101	37 191	53 139	11 17 41	31 257	7 1181	13 659	—	89 103	—	—	—
69	7 967	—	—	—	13 613	—	11 19 41	7 7 181	53 173	17 557	—	—
73	—	11 643	73 101	—	7 17 67	—	—	19 467	—	—	29 337	7 1439
79	—	—	47 157	7 1097	79 101	17 487	23 273	13 683	67 137	—	7 11 127	—
81	—	73 97	11 11 61	—	23 347	7 7 13 13	—	83 107	—	19 499	—	17 593
87	11 617	19 373	83 89	—	7 7 163	—	31 277	—	—	53 179	—	7 11 131
91	—	7 1013	19 389	—	61 131	—	11 11 71	17 523	7 13 101	—	—	—
93	—	41 173	—	7 7 157	—	—	13 661	—	29 317	11 863	7 1399	—
97	7 971	47 151	13 569	43 179	11 727	—	—	7 31 41	17 541	—	97 101	23 439
99	13 523	31 229	7 7 151	—	19 421	43 193	—	11 809	—	7 23 59	41 239	—

	200	500	800	1100	1400	1700	2000	2300	2600	2900	3200
3	7 29	—	11 73	—	23 61	13 131	—	7 7 47	19 137	—	—
9	11 19	—	—	—	—	—	7 7 41	—	—	—	—
11	—	7 73	—	11 101	17 83	29 59	—	—	7 373	41 71	13 13 19
17	7 31	11 47	19 43	—	13 109	17 101	—	7 331	—	—	—
21	13 17	—	—	19 59	7 7 29	—	43 47	11 211	—	23 127	—
23	—	—	—	—	—	—	7 17 17	23 101	43 61	37 79	11 293
27	—	17 31	—	7 7 23	—	11 157	—	13 179	37 71	—	7 461
29	—	23 23	—	—	—	7 13 19	—	17 137	11 239	29 101	—
33	—	13 41	7 7 17	11 103	—	—	19 107	—	—	7 419	53 61
39	—	7 7 11	—	17 67	—	37 47	—	—	7 13 29	—	41 79
41	—	—	29 29	7 163	11 131	—	13 157	—	19 139	17 173	7 463
47	13 19	—	7 11 11	31 37	—	—	23 89	—	—	7 421	17 191
51	—	19 29	23 37	—	—	17 103	7 293	—	11 241	13 227	—
53	11 23	7 79	—	—	—	—	—	13 181	7 379	—	—
57	—	—	—	13 89	31 47	7 251	11 11 17	—	—	—	—
59	7 37	13 43	—	19 61	—	—	29 71	7 337	—	11 269	—
63	—	—	—	—	7 11 19	41 43	—	17 139	—	—	13 251
69	—	—	11 79	7 167	13 113	29 61	—	23 103	17 157	—	7 467
71	—	—	13 67	—	—	7 11 23	19 109	—	—	—	—
77	—	—	—	11 107	7 211	—	31 67	—	—	13 229	29 113
81	—	7 83	—	—	—	13 137	—	—	7 383	11 271	17 193
83	—	11 53	—	7 13 13	—	—	—	—	—	19 157	7 7 67
87	7 41	—	—	—	—	—	—	7 11 31	—	29 103	19 173
89	17 17	19 31	7 127	29 41	—	—	—	—	—	7 7 61	11 13 23
93	—	—	19 47	—	—	11 163	7 13 23	—	—	41 73	37 89
99	13 23	—	29 31	11 109	—	7 257	—	—	—	—	—

	3500	3800	4100	4400	4700	5000	5300	5600	5900	6200	6500
3	31 113	—	11 373	7 17 37	—	—	—	13 431	—	—	7 929
9	11 11 29	13 293	7 587	—	17 277	—	—	71 79	19 311	7 887	23 283
11	—	37 103	—	11 401	7 673	—	47 113	31 181	23 257	—	17 383
17	—	11 347	23 179	7 631	53 89	29 173	13 409	41 137	61 79	—	7 7 7 19
21	7 503	—	13 317	—	—	—	17 313	7 11 73	31 191	—	—
23	13 271	—	7 19 31	—	—	—	—	—	—	7 7 123	11 593
27	—	43 89	—	19 233	29 163	11 457	7 761	17 331	—	13 479	61 107
29	—	7 547	—	43 103	—	47 109	73 73	13 433	7 7 11 11	—	—
33	—	—	—	11 13 31	—	7 719	—	43 131	17 349	23 271	47 139
39	—	11 349	—	23 193	7 677	—	19 281	—	—	17 367	13 503
41	—	23 167	41 101	—	11 431	71 71	7 7 109	—	13 457	79 79	31 211
47	—	—	11 13 29	—	47 101	7 7 103	—	—	19 313	—	—
51	53 67	—	7 593	—	—	—	—	—	11 541	7 19 47	—
53	11 17 19	—	—	61 73	7 7 97	31 163	53 101	—	—	13 13 37	—
57	—	7 19 29	—	—	67 71	13 389	11 487	—	7 23 37	—	79 83
59	—	17 227	—	7 7 7 13	—	—	23 233	—	59 101	11 569	7 937
63	7 509	—	23 181	—	11 433	61 83	31 173	7 809	67 89	—	—
69	43 83	53 73	11 379	41 109	19 251	37 137	7 13 59	—	47 127	—	—
71	—	7 7 79	43 97	17 263	13 367	11 461	41 131	53 107	7 853	—	—
77	7 7 73	—	—	11 11 37	17 281	—	19 283	7 811	43 139	—	—
81	—	—	37 113	—	7 683	—	—	13 19 23	—	11 571	—
83	—	11 353	47 89	—	—	3 17 23	7 769	—	31 193	61 103	29 227
87	17 211	13 13 23	53 79	7 641	—	—	—	11 11 47	—	—	7 941
89	37 97	—	59 71	67 67	—	7 729	17 317	—	53 113	19 331	11 599
93	—	17 229	7 599	—	—	11 463	—	—	13 461	7 29 31	19 347
99	59 61	7 557	13 17 19	11 409	—	—	—	41 139	7 857	—	—

	6800	7100	7400	7700	8000	8300	8600	8900	9200	9500	9800	10100
3	—	—	11 673	—	53 151	19 19 23	7 1229	29 307	—	13 17 43	—	—
9	11 619	—	31 239	13 593	—	7 1187	—	59 151	—	37 257	17 577	11 919
11	7 7 139	13 547	—	11 701	—	—	79 109	7 19 67	61 151	—	—	—
17	17 401	11 647	—	—	—	—	7 1231	37 241	13 709	31 307	—	67 151
21	19 359	—	41 181	7 1103	13 617	53 157	37 233	11 811	—	—	7 23 61	29 349
23	—	17 419	13 571	—	71 113	7 29 41	—	—	23 401	89 107	11 19 47	53 191
27	—	—	7 1061	—	23 349	11 757	—	79 113	—	7 1361	31 317	13 19 41
29	—	—	17 19 23	59 131	7 31 37	—	—	—	11 839	13 733	—	7 1447
33	—	7 1019	—	11 19 37	29 277	13 641	89 97	—	7 1319	—	—	—
39	7 977	11 11 59	43 173	71 109	—	31 269	53 163	7 1277	—	—	—	—
41	—	37 143	7 1063	—	11 17 43	19 439	—	—	—	7 29 47	13 757	—
47	41 167	7 1021	11 677	61 127	13 619	17 491	—	23 389	7 1321	—	43 219	73 139
51	13 17 31	—	—	23 337	83 97	7 1193	41 211	—	11 29 29	—	—	—
53	7 11 89	23 311	29 257	—	—	—	17 509	7 1279	19 487	41 233	59 167	11 13 71
57	—	17 421	—	—	7 1151	61 137	11 787	13 13 53	—	19 503	—	7 1451
59	19 19 19	—	—	—	—	13 643	7 1237	17 17 31	47 197	11 11 79	—	—
63	—	13 19 29	17 439	7 1109	11 733	—	—	—	59 157	73 131	7 1409	—
69	—	67 107	7 11 97	17 457	—	—	—	—	13 23 31	7 1367	71 139	—
71	—	71 101	31 241	19 409	7 1153	11 761	13 23 29	—	73 127	17 563	—	7 1453
77	13 23 23	—	—	7 11 101	41 97	—	—	47 191	—	61 157	7 17 83	—
81	7 983	41 167	—	31 251	—	17 17 29	—	7 1283	—	11 13 67	41 241	—
83	—	11 653	7 1069	43 181	59 137	83 101	19 457	13 691	—	7 37 37	—	17 599
87	71 97	—	—	13 599	—	—	7 17 73	11 19 43	37 251	—	—	61 167
89	83 83	7 13 79	—	—	—	—	—	89 101	7 1327	43 223	11 29 31	23 443
93	61 113	—	59 127	—	—	7 11 109	—	17 23 23	—	53 181	13 761	—
99	—	23 313	—	11 709	7 13 89	37 227	—	—	17 547	29 331	19 521	7 31 47

III.

Verwandlung der Brüche.

§. 1.

Man trägt gemeiniglich die Brüche so vor, daß sowohl der Zähler als der Nenner ganze Zahlen sind, weil dieses die eigentliche Absicht der Brüche ist, daß man die Verhältniß des Theils zum Ganzen durch die Verhältniß zwoer ganzer Zahlen vorstelle. Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile man das Ganze theilen müsse, und der Zähler drücket die Anzahl solcher Theile aus, die man zu nehmen hat. Indessen kann es auch Fälle geben, wo der Nenner oder der Zähler, oder beyde zugleich ebenfalls wiederum Brüche haben, und solche kann man sehr gut gebrauchen, weil sie zu besondern Absichten dienen, denen zu gefallen man auch öfters ganz reine Brüche in solche verwandelt, deren Nenner selbst wiederum mit Brüchen behaftet sind.

§. 2.

Nun kommen zwar die Regeln, so man bey solchen Verwandlungen zu beobachten hat, bereits in verschiedenen Schriften der Mathematicker vor. Da sie aber theils noch häufiger und selbst in den gemeinen Anweisungen zur Rechen-

Rechenkunst vorkommen solten, theils auch verschiedenes dabey nachzuholen ist; so werde ich den meisten Lesern einen Gefallen erweisen, wenn ich mich hier sowohl bey den Regeln als bey deren Gebrauch ein wenig aufhalte.

§. 3.

Man habe z. E. 3 durch $5\frac{1}{7}$ zu theilen, so kann dieses in Form eines Bruches geschrieben werden, welcher

$$\frac{3}{5\frac{1}{7}} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{5+\frac{1}{7}}$$

seyn wird. Dieser Bruch läßt sich nun leicht in einen reinen Bruch verwandeln, wenn man Nenner und Zähler mit 7 multiplicirt. Denn so ist $7 . 3 = 21$, und $7 . 5\frac{1}{7} = 36$, folglich

$$\frac{3}{5+\frac{1}{7}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

§. 4.

Hinwiederum wenn man z. E. $\frac{7}{30}$ vor sich hat, so kann man Zähler und Nenner durch 7 theilen, und da erhält man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{2}{7}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas kleiner als $\frac{1}{4}$ sey. Nun läßt sich $\frac{2}{7}$, wenn Zähler und Nenner durch 2 getheilt werden, ebenfalls in

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

verwandeln, und so erhält man

$$\frac{7}{30} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas weniges grösser als $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2}{9}$ ist. (§. 3.)

§. 5.

Man habe nun z. E. $\frac{216}{1147}$, so theilt man erstlich Zähler und Nenner durch 216, und dieses giebt

1147

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\frac{67}{216}}$$

auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{67}{216} = \cfrac{1}{3+\frac{15}{67}} = \frac{1}{3+a}$$

$$a = \frac{15}{67} = \cfrac{1}{4+\frac{7}{15}} = \frac{1}{4+b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \cfrac{1}{2+\frac{1}{7}} = \frac{1}{2+c}$$

Da man nun nach dieser vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfällt, so ist man mit der Auflösung des Bruchs fertig, und man findet, wenn man der Ordnung nach substituirt,

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

Dieses will nun sagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ sey etwas kleiner als $\frac{1}{5}$, etwas weniges grösser als $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, etwas noch wenigeres kleiner als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{5+\frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres grösser als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{2}{9}}} = \frac{1}{5+\frac{9}{29}} = \frac{29}{154}$$

und genaue gleich

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}.$$

§. 6.

Hiebey kommen nun zwo Fragen vor: Einmal, wie man die ganze Rechnung nach einer gewissen Ordnung einrichten, und die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$, als welche dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ immer näher kommen, leichte finden könne? Sodann wie man eben so leichte finden könne, um wie viel sie von dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ verschieden sind, damit man allenfalls des Unterschiedes Rechnung tragen könne?

§. 7.

Man setze erstlich

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + a}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}$

ist, so darf man nur Zähler und Nenner mit $3 + a$ multipliciren, und so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3 + a}{16 + 5a}.$$

Ferner

Ferner setze man $a = \frac{1}{4 + b}$

wobey folglich $b = \frac{1}{2 + \frac{1}{7}}$ ist, so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{3 + \cfrac{1}{4 + b}}{16 + \cfrac{5}{4 + b}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4 + b$ multiplicirt wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{13 + 3b}{69 + 16b}.$$

Setzt man nun wiederum $b = \frac{1}{2 + c}$

so ist $c = \frac{1}{7}$, und man erhält

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{13 + \cfrac{3}{2 + c}}{69 + \cfrac{16}{2 + c}} = \frac{29 + 13c}{154 + 69c}.$$

Endlich da $c = \frac{1}{7}$ ist, so wird

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{29 + \cfrac{13}{7}}{154 + \cfrac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

welches wiederum den fürgegebenen Bruch giebt.

§. 8.

§. 8.

Dieses Verfahren zeiget nun an, wie die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ aus den Theilern 5, 3, 4, 2, 7 entspringen. Denn so ist

$$\begin{array}{ll} 1.\ 3 = 3 & 5.\ 3 + 1 = 16 \\ 3.\ 4 + 1 = 13 & 16.\ 4 + 3 = 69 \\ 13.\ 2 + 3 = 29 & 69.\ 2 + 16 = 154 \\ 29.\ 7 + 13 = 216 & 154.\ 7 + 69 = 1147. \end{array}$$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\ \frac{13+3b}{69+16b},\ \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ setzen, um die absolute Zahlen des folgenden Bruches zu erhalten. Denn so ist

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69},\ \text{und}\ \frac{13+\frac{3}{2}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und}\ \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}.$$

§. 9.

Wenn wir nun die ganze Rechnung in ihre einfachste Ordnung bringen, so läßt sie sich folgender gestalt vorstellen. Erstlich dividiret man jeden Theiler durch seinen Ueberrest. Demnach nun bey eben dem Beyspiele zu bleiben

216

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l} 216 & 1147 & 5 & & & & \\ & 1080 & & & & & \\ & 67 & 216 & 3 & & & \\ & & 201 & & & & \\ & & 15 & 67 & 4 & & \\ & & & 60 & & & \\ & & & 7 & 15 & 2 & \\ & & & & 14 & & \\ & & & & 1 & 7 & 7. \\ & & & & & 7 & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

Mit diesen Theilern, Ueberresten und Quotienten macht man sodann folgende Figur

1147		1	0
216	5	0	1
67	3	1	5
15	4	3	16
7	2	13	69
1	7	29	154
		216	1147

Man schreibt nemlich in der ersten Columne die Theiler und Ueberreste, in der zweyten die Quotienten, in der dritten zeichnet man 1, 0, und in der vierten 0, 1. Die übrigen Zahlen dieser beyden Columnen ergeben sich sodann, indem man

$$\begin{array}{lll} 5.\ 0 + 1 = 1 & \text{und} & 5.\ 1 + 0 = 5 \\ 3.\ 1 + 0 = 3 & & 3.\ 5 + 1 = 16 \\ 4.\ 3 + 1 = 13 & & 4.\ 16 + 5 = 69 \\ 2.\ 13 + 3 = 29 & & 2.\ 69 + 16 = 154 \\ 7.\ 29 + 13 = 216 & & 7.\ 154 + 69 = 1147 \end{array}$$

macht,

macht, das will sagen, jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenstehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächst über derselben stehenden Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden letzten Columnen die Brüche

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147},$$

welche wechselsweise grösser und kleiner sind als der letzte, wovon aber je der folgende weniger verschieden ist.

§ 10.

Das bisher gesagte, kömmt bereits in mehren Schriften der Mathematicker vor, und dient überhaupt dahin, daß man einen durch grössere Zahlen ausgedrückten Bruch, der sich nicht genau auf kleinere Zahlen bringen läßt, dergestalt auf kleinere Zahlen bringe, daß er durch keine kleinere genauer getroffen wird. Da man auf diese Art mehrentheils eine ganze Reyhe von Brüchen findet, wovon je der folgende genauer, dabey aber durch grössere Zahlen ausgedrückt ist; so behält man dabey die Wahl, zu bestimmen, ob man sich mit einem kleinern begnügen könne, oder einen durch grössere Zahlen ausgedruckten dafür nehmen wolte. In physischen und practischen Dingen fällt dieses desto bequemer, weil man da ohnehin an keine geometrische Schärfe gedencken kann.

§. 11.

Man ist aber, so viel ich weiß, bey der Erfindung solcher Brüche stehen geblieben, ohne zu sehen, ob nicht durch eben das Verfahren, die Genauigkeit eines jeden bestimmt werden könnte? Die natürlichste Probe, die sich hierüber anstellen läßt, und die uns zugleich auf die Spuhr führen wird, ist, daß man nach der gewöhnlichen Art die Brüche zu subtrahiren, diese Subtraction vornehme. Denn so findet man

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{1147 - 1080}{5 \cdot 1147} = \frac{67}{5 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16 \cdot 1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154 \cdot 1147}.$$

Und hieraus sieht man, daß die Zähler dieser Brüche 67, 15, 7, 1 der Ordnung nach die Ueberreste der ersten Columne, die Nenner aber das Product aus dem Nenner eines jeden Bruches und dem Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches sind. Auf diese Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zween aufgelöst, und es ist

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{76}{5 \cdot 1147} = \frac{3}{16} + \frac{15}{16 \cdot 1147} = \frac{13}{69} - \frac{7}{69 \cdot 1147}$$
$$= \frac{29}{153} + \frac{1}{154 \cdot 1147} = \frac{216}{1147} + 0.$$

§. 12.

Um nun überhaupt einzusehen, wie diese Ueberreste der ersten Columne hier zum Vorschein kommen, dörfen wir nur anstatt die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ von dem Bruche $\frac{216}{1147}$ abzuziehen, dieselben von den vorhin (§. 7.) gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\quad \frac{13+3b}{69+16b},\quad \frac{29+13c}{154+69c}$$

abziehen. Denn diese stellen sämtlich den Bruch $\frac{216}{1147}$ vor, und es ist aus dem (§. 5.) zu sehen, daß die Buchstaben a, b, c durch die Ueberreste 67, 15, 7 bestimmt werden. Auf diese Art haben wir demnach

$$+\frac{3+a}{16+5a}-\frac{3}{16}=\frac{a}{16(16+5a)}=\frac{15:67}{16(16+5.\frac{15}{67})}$$

$$=\frac{15}{16.\ 1147}$$

$$-\frac{13+3b}{69+16b}+\frac{13}{69}=\frac{b}{69(69+16b)}=\frac{7:16}{69(69+16.\frac{7}{16})}$$

$$=\frac{7}{69.\ 1147}$$

$$\frac{29+13c}{154+69c}-\frac{29}{154}=\frac{c}{154(154+69c)}$$

$$=\frac{1:7}{154(154+\frac{69}{7})}=\frac{1}{154.\ 1147}.$$

Und hieraus sieht man, wie die Ueberreste der ersten Columne zu Nennern werden.

§. 13.

Wenn man die Brüche

$$\frac{1}{5},\quad \frac{3}{16},\quad \frac{13}{69},\quad \frac{29}{154},\quad \frac{216}{1147}$$

umkehrt, und statt derselben

$$\frac{5}{1},\quad \frac{16}{3},\quad \frac{69}{13},\quad \frac{154}{29},\quad \frac{1147}{216}$$

nimmt, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{1147}{216}=\frac{5}{1}+\frac{67}{1.\ 216}=\frac{16}{3}-\frac{15}{3.\ 216}=\frac{69}{13}+\frac{7}{13.\ 260}$$

$$=\frac{154}{29}-\frac{1}{29.\ 216}=\frac{1147}{216}+0,$$ wo ebenfalls die Ueberreste 67, 15, 7, 1 als Zähler erscheinen.

§. 14.

Wir haben bisher das ganze Verfahren, in Form eines Beyspieles vorgetragen, doch so, daß sich der Grund desselben zugleich mit einsehen läßt. Berechnet man auf diese Art noch mehrere Beyspiele, so wird man leicht finden, daß man bald mehr, bald minder Divisionen vorzunehmen hat, bis der Bruch ganz aufgelöst ist. Wir wollen, um den Unterschied zu zeigen, die Figur von zwey andern Beyspielen herstellen, welche die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{257}$$

betreffen. Es ist folglich

97		1	0
61	1	0	1
36	1	1	1
25	1	1	2
11	2	2	3
3	3	5	8
2	1	17	27
1	2	22	35
—		61	97

257		1	0
231	1	0	1
26	8	1	1
23	1	8	9
3	7	9	10
2	1	71	79
1	2	80	89
—		231	257

und daher für das erste Beyspiel

$$\frac{61}{97}=\frac{1}{1}-\frac{36}{1.97}=\frac{1}{2}+\frac{25}{2.97}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3.97}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8.97}=\frac{17}{27}-\frac{2}{27.97}=\frac{22}{35}+\frac{1}{35.97}=\frac{61}{97}-0,$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61}=\frac{1}{1}+\frac{36}{1.61}=\frac{2}{1}-\frac{25}{1.61}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2.61}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5.61}=\frac{27}{17}+\frac{2}{17.61}=\frac{35}{22}-\frac{1}{22.61}=\frac{97}{61}+0.$$

Für das andere Beyspiel

$$\frac{231}{257}=\frac{1}{1}-\frac{26}{1.257}=\frac{8}{9}+\frac{23}{9.257}=\frac{9}{10}-\frac{3}{10.257}=\frac{71}{79}+\frac{2}{79.257}=\frac{80}{89}-\frac{1}{89.259}=\frac{231}{257}+0,$$

oder umgekehrt

257/231

$$\frac{257}{231}=\frac{1}{1}+\frac{26}{1.231}=\frac{9}{8}-\frac{23}{8.231}=\frac{10}{9}+\frac{3}{9.231}=\frac{79}{71}-\frac{2}{71.257}=\frac{89}{80}+\frac{1}{80.231}=\frac{257}{231}-0.$$

§. 15.

Es ist aber eben diese immer verschiedene Anzahl der vorzunehmenden Divisionen, welche den algemeinen Beweis schwerer macht, weil man dabey genöthiget wird, Glied für Glied zu beweisen, und die Anzahl der Divisionen unbestimmt lassen muß. Wir werden diesen Beweis folgendergestalt vortragen: Es sey die allgemeine Figur

A		1	0
B	a	0	1
C	b	1	a
D	c	b	ab + 1
E	d	bc + 1	abc + c + a
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
- -	- - -	- -	- - -
O		x	v
P	q	y	w
Q		qy + x	qw + v

so ist überhaupt $Pq + Q = O$, weil O durch P dividirt q giebt, und Q übrig läßt. Nun ist zu beweisen, daß, was von den Brüchen $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{w}$ gilt, auch von dem folgenden und daraus formirten Bruche $\frac{qy+x}{qw+v}$ gelte, oder, daß wenn erstere beyde die Gleichungen

$$+\frac{x}{v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{y}{w}+\frac{B}{A}=\frac{\pm P}{Aw}$$

geben, der dritte auf eben die Art die Gleichung

$$+\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

geben werden. Um dieses zu beweisen, haben wir weiter nichts zu thun, als die in diesen Gleichungen angezeigte Subtractionen vorzunehmen. Denn so verwandeln sich die beyden erstern in

$$\frac{Ax-Bv}{vA}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{Ay+Bw}{wA}=\frac{\pm P}{Aw}$$

Und hieraus folgt, daß

$$\pm O=+Ax-Bv$$
$$\pm P=-Ay+Bw$$

ist. Nun aber ist

$$\pm Q=O-Pq$$

demnach, wenn man die für O und P gefundene Werthe setzt,

$$\pm Q=Ax-Bv+Ayq-Bwq.$$

Eben dieses folgt aber auch aus der dritten Gleichung

$$\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}.$$

Denn

Denn wird die Subtraction vorgenommen, so erhält man

$$\frac{qyA+Ax-qwB-vB}{A(qw+v)}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

demnach, mit Weglassung der Nenner

$$\pm Q=Ax-Bv+qyA-qwB,$$

welches eben die Gleichung ist, die aus denen beyden erstern folgte, und demnach das, was wir zu beweisen hatten, an Tag legt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß diese beyden Gleichungen von den 2 ersten Gliedern der Figur

$$\begin{array}{c|c|c}
A & \text{———————} & \text{——} \\
B & a\text{ ——————— } 0 & 1 \\
C & b\text{ ——————— } 1 & a
\end{array}$$

gelten, denn so werden sie auch von dem dritten, demnach von dem vierten, und jeden folgenden wahr seyn. Zu diesem Ende haben wir nur

$$\begin{array}{l|l|l|l}
P=B & q=a & x=0 & v=1 \\
Q=C & & y=1 & w=a
\end{array}$$

zu setzen, so werden die Gleichungen

$$\pm O=+Ax-Bv$$
$$\pm P=-Ay+Bw$$

in folgende

$$\pm B=+A.0-B.1=-B$$
$$\pm C=-A.1+B.a$$

verwandelt. Erstere ist für sich klar, letztere wird dadurch als richtig erkannt, weil A durch B di-

B dividiret, a giebt, und C übrig läßt, demnach

$$C = A - Ba$$

ist. Wir haben demnach

$$\frac{B}{A} = \frac{0}{1} + \frac{B}{A}$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{C}{A(a)}$$
$$= \frac{b}{ab+1} + \frac{D}{A(ab+1)}$$
$$= \frac{bc+1}{abc+c+a} - \frac{E}{A(abc+c+a)}$$
$$= \&c.$$
$$= \frac{x}{v} \pm \frac{O}{Av}$$
$$= \frac{y}{w} \mp \frac{P}{Aw}$$
$$= \frac{qy+x}{qw+v} \pm \frac{Q}{A(qw+v)}$$
&c.

Nun sind die Zähler B, C, D, E &c. O, P, Q der Ordnung nach kleiner, weil der letzte $= O$ wird; hingegen aber die Nenner A, Aa, A (ab+1) &c. der Ordnung nach grösser, weil a, b, c &c. positiv und ganze Zahlen, demnach entweder $= 1$, und mehrentheils grösser als 1 sind. Da folglich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{Aa}$, $\frac{D}{A(ab+1)}$ &c. sehr merklich kleiner, und zuletzt $= 0$ werden, so sind auch die

Brü-

Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+c+a}$ &c. von dem fürgegebenen $\frac{B}{A}$ der Ordnung nach weniger, und der letzte gar nicht davon verschieden.

§. 16.

Wenn ein Bruch sich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, so erhält man nach diesem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, sondern auch noch alle noch kleinere, die von demselben am wenigsten verschieden sind. Man habe z. E. $\frac{189}{301}$, so ist

301		1	0
189	1	0	1
112	1	1	1
77	1	1	2
35	2	2	3
7	5	5	8
		27	43

Demnach ist

$$\frac{189}{301} - \frac{27}{43} = \frac{1}{2} + \frac{77}{2.301} - \frac{2}{3} - \frac{35}{3.301} - \frac{5}{8} + \frac{7}{8.301}$$

oder $= \frac{1}{2} + \frac{11}{2.43} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3.43} - \frac{5}{8} + \frac{1}{8.43}$.

§. 17.

Man sieht ferners auch leicht, daß besonders Decimalreyhen auf diese Art in Brüche verwandelt werden können, die sie so genau, als man es verlangt, vorstellen. Doch da man solche Reyhen nicht so unendlich, wie sie sind, in die Rechnung ziehen kann, so nimmt man auch nur so viele Ziffern, als es nöthig ist. Indessen kann man derer, so man wegläßt, dennoch in Rechnung tragen, damit man das Dividiren eben nicht weiter verfolge als es nöthig ist. Und dabey hat man auf zweyerley Umstände zu merken: Einmal findet man früher den Bruch, welcher die Decimalreihe, so weit man sie verlangt, vorstellt. Sodann häuft sich bey dem fortgesetzten Dividiren der Fehler, der aus dem weggelassenen Theile der Decimalreihe entsteht, und dieses kann machen, daß man zuletzt ganz andere Zahlen heraus bringt, als die, so man heraus bringen würde, wenn man die Reihe ganz in die Rechnung ziehen würde. Wir wollen beydes durch ein Beyspiel erläutern. Es sey das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu der Diagonale desselben durch Brüche auszudrücken, welche dasselbe sehr genaue, oder beynahe ganz richtig ausdrücken. Nun weiß man, daß, wenn die Seite $= 1$ ist, die Diagonale $= \sqrt{2} = 1,41421355530202722\ldots$ ist. Wir wollen uns hier mit den 7 ersten Decimalzahlen 1, 4142135 begnügen, und den Ueberrest $=$ a setzen; demnach ist

1,4142135 + a		1	0
1,0000000	1	0	1
4142135 + a	2	1	1
1715730 − 2 a	2	2	3
710675 + 5 a	2	5	7
294380 − 12 a	2	12	17
121915 + 29 a	2	29	41
50550 − 70 a	2	70	99
20815 + 169 a	2	169	239
8920 − 408 a	2	408	577
2975 + 985 a	2	985	1393
2970 − 2378 a			

Man sieht hieraus, daß der von dem Ueberrest a herrührende Unterschied anfängt beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Division nicht weiter fortsetzen müsse. Da nun

$$\frac{17}{12} = 1,4166\ldots.$$

$$\frac{41}{29} = 1,41379\ldots.$$

$$\frac{99}{70} = 1,41428\ldots.$$

$$\frac{239}{169} = 1,414207\ldots.$$

$$\frac{577}{408} = 1,414215$$

$$\frac{1393}{985} = 1,4142132$$

ist, so sieht man hieraus, daß, wenn man bey den

den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der letzte Bruch eben so weit reicht, und daher auch aus diesem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

§. 18.

Um noch ein Beyspiel anzuführen, welches nicht so regulär ist, wie das erst angebrachte; so setzen wir, der Mond durchlaufe den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. 5″, 2‴, $58\frac{1}{2}$ IV. Dieses giebt in Decimaltheilen 27, 32158601 Tage. Um nun zu sehen, wie sich diese Zahl zu ganzen Tagen verhalte, so ist

27, 32158601 + a		1	0
1, 00000000		27 — 0	1
32158601 + a		3 — 1	27
3524197 — 3 a		9 — 3	82
440828 + 28 a		7 — 28	765
438401 — 199 a		1 — 199	5437
12427 + 227 a		35 — 227	6202.
3456			

Weiter ist nun die Division nicht fortzusetzen, weil sich der von a herrührende Unterschied zu sehr aufhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den letzten Bruch $\frac{6202}{227}$, so will dieser sagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227 mal den Thierkreis durchlaufe, und dieses ist nun sehr genaue. Denn wird 6202 durch 227 getheilt, so findet man

man 27 T. 7 St. 43 M. 5″. 1‴. 19⁗, welches von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{3}$ Tertien verschieden ist, und folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{3}$ Secunden Unterschied giebt. Hingegen giebt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{3}{5}$ Secunden zu klein ist. Dieser Unterschied ist beträchtlicher als der vorhergehende; indessen ist er für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch Räderwerke vorstellen wolte, unerheblich genug, um so mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ ist, durch diese schickliche Zerfällung der Zahlen, zu der Eintheilung der Räder sehr bequem ist, und weil man die Uhr erst nach etwann 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat.

§. 19.

Man kann auf eine ganz ähnliche Art algebraische Ausdrücke, und besonders unendliche Reihen in Brüche verwandeln, ungeachtet sich dabey nicht immer die Schicklichkeit einfindet, daß solche Brüche dem wahren Werthe geschwinde näher kämen. Ich werde indessen die zwey Beyspiele hersetzen, mit denen ich hierüber eine Probe angestellt habe. Das erste betrift die Logarithmen. Denn da ist
log. $(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 +$ ꝛc.

Wird

Wird diese Reihe in 1 getheilt, so ist der Quotient $=\frac{1}{z}$, der Ueberrest $=+\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{4}z^3-$ ꝛc. Theilt man durch diesen die Reihe $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-$ ꝛc. so ist der Quotient $=2$, der Ueberrest $=\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{3}{20}z^4$ ꝛc. Wird durch diesen zweyten Ueberrest der erste $\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{4}z^3-$ ꝛc. getheilt, so ist der Quotient $=\frac{3}{z}$, der Ueberrest $=\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{5}z^3+$ ꝛc. Theilt man durch diesen dritten Ueberrest den zweyten, so ist der Quotient $=1$, der vierte Ueberrest $=\frac{1}{30}z^3-$ ꝛc. wodurch man wiederum den dritten theilt, und dadurch $\frac{5}{z}$ zum Quotienten erhält. Fährt man auf diese Art fort, so wird man der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{z}, 2, \frac{3}{z}, 1, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}$ ꝛc. erhalten, und diese geben sodann

$$\log.(1+z)=\cfrac{1}{1:z+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3:z+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5:z+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{7:z+\cfrac{1}{\text{ꝛc.}}}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z=\frac{1}{5}$, so ist

log.

$$\log.\tfrac{6}{5}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{35+\text{ꝛc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt demnach

	1	0
5	0	1
2	1	5
15	2	11
1	31	170
25	33	181
2:3	856	4695
35	$603\frac{2}{3}$	3311
ꝛc.	$21984\frac{1}{3}$	120580

Nun ist

$1:5 = 0,20 \ldots\ldots$
$2:11 = 0,1818 \ldots\ldots$
$31:170 = 0,18235 \ldots\ldots$
$33:181 = 0,1823204 \ldots$
$856:4695 = 0,18232161 \ldots$
$603\frac{2}{3}:3311 = 0,1823215544 \ldots$
$21984\frac{1}{3}:120580 = 0,1823215569 \ldots$

Es ist aber $\log.\frac{6}{5} = 0,18232155679395 \ldots$ woraus man sieht, daß diese Brüche noch ziemlich geschwinde den wahren Werthe näher kommen. Wenn wir die Theilung mit der

Zahl

Zahl selbst vornehmen, so fällt die Rechnung folgendermassen aus

1 0000000000		1	0
1823215568	5 —	0	1
883922160	2 —	1	5
55371248	15 —	2	11
53353440	1 —	31	170
2017808	25 —	33	181
2908240			
ꝛc.			

woraus man sieht, daß der letzte Quotient 25 hätte um 1 grösser seyn können. Läßt man denselben aber so wie er ist, so wird der folgende $=\frac{2}{3}$, und so kommen alle Quotienten heraus, die wir vermittelst der unendlichen Reihe gefunden haben.

§. 20.

Setzt man $z = 1$, in welchem Fall die Reihe selbst sehr wenig convergirt, so erhält man

$$\log. 2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{7+\text{ꝛc.}}}}}}}}$$

und

und dieses giebt

	1	0
1 —	0	1
2 —	1	1
3 —	2	3
1 —	7	10
5 —	9	13
2:3 —	52	75
7 —	$43\frac{2}{3}$	63
ꝛc. —	$357\frac{2}{3}$	516

Nun ist

$$\frac{7}{10} = 0,700 \ldots\ldots$$
$$\frac{9}{13} = 0,6923 \ldots\ldots$$
$$\frac{52}{75} = 0,6933 \ldots\ldots$$
$$\frac{131}{189} = 0,69312 \ldots\ldots$$
$$\frac{1073}{1548} = 0,693152 \ldots$$
ꝛc.
$$\log. 2 = 0,693147 \ldots$$

Man sieht hieraus, daß auch in diesem Fall die Brüche sich dem wahren Werthe noch merklich geschwinde nähern.

§. 21.

Wenn $z > 1$ ist, so wird die Reihe

$$\log. (1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \text{ꝛc.}$$

divergent, und giebt gar keinen Werth, der sich bestimmen liesse. Laßt uns demnach sehen, ob es mit unsern Brüchen besser geht. Es sey

z. E.

z. E. $z = 2$, so haben wir

$$\log.3 = \cfrac{1}{1:2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:2 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:2 + \text{rc.}}}}}}}}$$

um hiebey die Brüche zu vermeiden, werden wir die Figur so vorstellen

	12	0	
1:2	0	12	= 0:1
2	12	6	= 2:1
3:2	24	24	= 1:1
1	48	42	= 8:7
5:2	72	66	= 12:11
2:3	228	207	= 76:69
7:2	224	204	= 56:51
rc.	1012	921	= 1012:921

Nun ist

$$\begin{aligned} 8:7 &= 1,14\ldots\ldots \\ 12:11 &= 1,0909\ldots \\ 76:69 &= 1,1014\ldots \\ 56:51 &= 1,0980\ldots \\ 1012:921 &= 1,0988\ldots \\ &\text{rc.} \\ \log.3 &= 1,098612\ldots \end{aligned}$$

Man

Man sieht demnach, daß die Brüche nicht divergiren, sondern in der That dem wahren Werthe näher kommen, so, daß der letzte kaum um 0,0002 davon verschieden ist.

§. 22.

Nimmt man für z eine grössere Zahl, so muß man zwar die Rechnung weiter fortsetzen, bis man auf Brüche kömmt, die dem wahren Werthe sehr nahe kommen. Es wird aber immer angehen. Denn die Quotienten, so man wenn die Theilung der Reihe fortgesetzt wird, findet, haben in der Art, wie sie aufeinander folgen, ein sehr einfaches Gesetz. Sie sind nemlich

$$\frac{1}{z}, \frac{2}{1}, \frac{3}{z}, \frac{2}{2}, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}, \frac{2}{4}, \frac{9}{z}, \frac{2}{5}, \frac{11}{z}, \frac{2}{6}, \frac{13}{z} \text{ rc.}$$

wobey folglich die Glieder, so durch z dividirt sind, nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen, und folglich ihr Zähler endlich grösser wird als jede fürgegebene Zahl. Hingegen nehmen zwar die nicht durch z getheilte Glieder $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ rc. immer ab, es hindert dieses aber nicht, daß die dadurch herfürgebrachte Brüche nicht solten dem wahren Werthe näher kommen, als die nächstvorhergehenden; und wie wir aus dem letzten Beyspiele sehen, so vermindern sie das Anwachsen der Zahlen, so die Zähler und Nenner der Brüche sind. Wir haben demnach hiedurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen selbst divergirend werden.

§. 23.

Für die Reihe

$$v = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{ꝛc.}$$

welche den Bogen eines Circuls durch seine Tangente ausdrücket, findet man nach angestellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{5:4z + \cfrac{1}{28:9z + \cfrac{1}{81:64z + \cfrac{1}{704:225\,z + \text{ꝛc.}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe fast gar nicht convergirt, so haben wir

$$\text{arc. } 45^\circ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \text{ꝛc.}}}}}}}$$

folglich, um die Brüche zu vermeiden

	36	0		
1 —	0	36		
3 —	36	36		
5:4 —	108	144	= 3:4	= 0,75 ....
28:9 —	171	216	= 19:24	= 0,7917 ...
81:64 —	640	816	= 40:51	= 0,7843 ...
	981	4995:4	= 436:555	= 0,7856 ...

Es ist aber der Bogen von 45 Gr. ... = 0,7854

woraus

woraus man wiederum sieht, daß diese Brüche dem wahren Werthe noch merklich geschwinde näher kommen.

§. 24.

Die Quotienten, so man bey der Division dieser Reihe findet, haben ebenfalls ein sehr ordentliches Gesetz, nach welchem sie auf einander folgen. Es sind nemlich dieselben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z},\ \frac{3}{1.z},\ \frac{5}{4.z},\ \frac{7.4}{9.z},\ \frac{9.\ 9}{4.16.z},\ \frac{11.\ 4.16}{9.25.z},\ \frac{13.\ 9.25}{4.16.36.z},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z},\ \frac{17.\ 9.25.49}{4.16.36.64.z},\ \frac{19.\ 4.16.36.64}{9.25.49.81.z}\ \text{ꝛc.}$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores sind lauter Quadratzahlen, welche wechselsweise Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächst grössere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und diese bestimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle diese Brüche sind durch z dividirt. Hingegen werden sie nicht wechselsweise immer grösser und kleiner, sondern sie nähern sich zwoen bestimmten Grössen, nemlich die Brüche

$$\frac{3}{1},\ \frac{7\cdot 4}{9},\ \frac{11.4.16}{9.25},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49}\ \text{rc.}$$

nähern sich der Zahl 3,1415926.... welche den halben Umkreiß des Circuls vorstellt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$\frac{(4x+3)(2^2.4^2.6^2.8^2....(2x)^2)}{3^2.5^2.7^2.9^2....(2x+1)^2}$$

Hingegen nähern sich die Brüche

$$\frac{1}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{9.9}{4.16},\ \frac{13.9.25}{4.16.36},\ \frac{17.9.25.49}{4.16.36.64}\ \text{rc.}$$

der Zahl, welche herauskömmt, wenn man 4 durch den halben Umkreis des Circuls 3,1415926.... dividirt, und welche demnach $= 1{,}27323954473$....rc. ist. Dieses macht nun, daß, wenn man $z > 1$ annimmt, die Brüche sich dem wahren Werthe sehr langsam nähern. Da sie sich aber dennoch nähern, so haben sie vor der Reihe ein vieles voraus, weil diese in allen den Fällen, wo $z > 1$ ist, divergirt, und daher gar keinen Werth giebt.

§. 25.

Es giebt überdies noch andere Arten, wie man, ohne eben eine Theilung vorzunehmen, zu den Quotienten gelangen kann, die man, um solche Brüche heraus zu bringen, nöthig hat. So z. E. wenn aus jeder Zahl $AA+BB$ die Quadratwurzel solle ausgezogen werden, so

könnte man nach Anleitung der Newtonschen Binomialformel diese Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrücken, und vermittelst dieser Reihe die Quotienten suchen, und so würde man der Ordnung nach und wechselsweise

$A,\ \frac{2A}{BB},\ 2A,\ \frac{2A}{BB},\ 2A$ &c. finden, welches den Bruch

$$1:\surd(A^2+B^2) = \cfrac{1}{A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}}$$

und daher die Wurzel

$$\surd(AA+BB) = A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}$$

geben würde. Man kann aber diese Formel unmittelbar folgendergestalten finden. Man setze $\surd(AA+BB) = A+y$, so ist

$$AA+BB = AA+2Ay+yy,$$

folglich $\quad y(y+2A) = BB$

und daher

$$y = \frac{BB}{2A+y}.$$

Nun kann man für das y, so in dem Nenner des Bruches ist, den Bruch selbst wiederum setzen, so hat man

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, so wird

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}}$$

Und hiebey darf man nur jeden Bruch durch BB theilen, um sodann die vorige Formel

$$y + A = \sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

zu erhalten.

§. 26.

Es sey nun z. E. die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; so setzt man $38 = 36 + 2$, demnach $36 = AA$, $2 = BB$, $A = 6$, $2A:BB = 6$, und so hat man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \&c.}}}}$$

Dieses giebt nun folgende Figur

	1	0
6	0	1
12	1	6
6	12	73
12	73	444
6	888	5401
ꝛc.	5401	32850

demnach ist $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$

$> 1\frac{12}{73}$

$< 1\frac{73}{444}$

ꝛc.

Man kann sich aber auch der ersten Formel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln de tri finden, welche man so lange fortsetzen kann, als man es der Genauigkeit halber nöthig erachtet. Und dieses findet statt, so oft die fürgegebene Zahl eine Summe von zwoen Quadratzahlen ist, von welchen man die Wurzeln hat. Denn da macht man der Ordnung nach

$$2A:B = B:a$$
$$(2A+a):B = B:b$$
$$(2A+b):B = B:c$$
&c.

und die Zahlen $A+a$, $A+b$, $A+c$ &c. werden der wahren Wurzel desto näher kommen, je weiter man diese Analogien fortgesetzt hat, und je grösser A als B ist.

§. 27.

Um aber genauer zu sehen, wie sich diese gefundenen Werthe dem wahren nähern, so werden wir für A, B solche Ausdrücke nehmen, die ein Quadrat geben. Man setze demnach

$$A = a - b$$
$$BB = 4ab,$$

so ist

$$AA + BB = a^2 + 2ab + bb$$

und

$$\sqrt{(AA + BB)} = a + b = A + y$$

demnach $y = 2b$

und

$$\sqrt{(AA+BB)} = (a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \&c.}}$$

Wird nun dieser Bruch stuffenweise um ein Glied weiter abgebrochen und die Reduction vorgenommen, so erhält man der Ordnung nach

$$\sqrt{(AA-BB)} = a-b+2ab\,(a+b) \;:(a^2-b^2)$$
$$= a-b+2ab(a^2-b^2) \;:(a^3+b^3)$$
$$= a-b+2ab\,(a^3+b^3) \;:(a^4-b^4)$$
&c.
$$= a-b+2ab\,(a^{2n}-b^{2n}) \;:(a^{2n+1}+b^{2n+1})$$
$$= a-b+2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1}) : (a^{2n+2}+b^{2n+2})$$

Um dieses überhaupt zu beweisen, darf man nur setzen, daß man mit Beybehaltung von 2n

2n Gliedern des Bruches auf den Ausdrucke

$$\frac{2ab\,(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

gekommen. Denn so wird man, wenn man um eine Stuffe tiefer anfängt den Ausdruck

$$\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{2ab\,(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}}$$

erlangen. Nimmt man bey diesem die Reduction vor, so verwandelt derselbe sich in

$$\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+1}-b^{n2+1}}$$

Und dieser kommt ebenfalls heraus, wenn man in den erst angenommenen

$$\frac{2ab\,(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

für n, n+1 setzt, und die Zeichen verwechselt, welche vor b stehen. Ist demnach $a > b$, so läßt sich n so groß annehmen, daß die Formel sich in

$$\sqrt{(A^2+B^2)} = a-b+\frac{2ab.\,a^{2n}}{a^{2n+1}}$$
$$= a-b+2b = a+b$$

verwandelt, welches sodann in der That die Wurzel ist. Man sieht zugleich hieraus, daß, weil

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=a+b-\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

und

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=a+b+\frac{2(a+b).b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}$$

ist, die Brüche sich dem wahren Werthe der Wurzel in einer Progreßion nähern, welche einer geometrischen desto näher kommen, je grösser n ist, und daß die Brüche, welche zu groß sind, immer um mehr zu groß sind, als die, so zu klein sind, zu klein sind. Denn die Unterschiede der erstern sind mit $(a+b)$, die Unterschiede der andern mit $(a-b)$ multiplicirt. Die Näherung ist am langsamsten, wenn $A=B$ ist. Nun ist aber überhaupt

$$2a=+A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$
$$2b=-A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$

demnach für den Fall, wo $A=B$ ist, findet sich

$$2a=A(+1+\sqrt{2})=2,4142136\ldots.$$
$$2b=A(-1+\sqrt{2})=0,4142136\ldots.$$

demnach

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}=5,8284272\ldots$$

Da nun die Brüche entweder um

$$\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=\frac{2\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1+(b:a)^{2n+1}}$$

zu klein, oder um

$$\frac{2(a+b)b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=\frac{2(1+b:a).(b:a)^{2n+1}}{1-(b:a)^{2n+2}}$$

zu klein sind, und

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}=0,1715728\ldots$$

folglich immer kleiner als 0,1715728, oder ungefehr $\frac{1}{6}$ ist, so sieht man, daß der Unterschied jedes folgenden Bruches von dem wahren Werthe der Wurzel immer wenigstens 6 mal kleiner wird, so oft man nemlich für A die grössere, für B aber die kleinere Zahl nimmt. Denn widrigenfalls ist die Näherung langsamer.

§. 28.

Man setze z. E. $A=4$, $B=3$, so weiß man daß die Quadratwurzel von $A^2+B^2=16+9=25$, wird $=5$ seyn. Nach unserer Formel haben wir $2A:BB=8:9$, und $2A=8$, folglich $y=1$, und

	81	0	
8:9	0	81	
8	81	72 =	9:8
8:9	648	657 =	72:73
8	657	656 =	657:656
ꝛc.	5904	5905 =	5904:5905

Da nun diese Brüche solten $=y=1$ seyn, so sieht man, daß die Unterschiede $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{5905}$ ꝛc. sind, und daher jeder folgende bey 9 mal kleiner wird.

§. 29.

Bey den Cubicwurzeln läßt sich der bey den Quadratwurzeln gebrauchte Vortheil nicht anbrin-

anbringen. Nimmt man aber die Reihe

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{1.2b^2}{3.6a^5} + \frac{1.2.5b^3}{3.6.9a^8} - \frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^{11}} + \text{ꝛc.}$$

vor, und theilt sie anfangs durch 1, so, daß der erste Quotient = a sey, und sodann jeden Theiler durch den Ueberrest, so sind die Quotienten der Ordnung nach

$$a,\ \frac{3a^2}{b},\ a,\ \frac{9a^2}{2b},\ \frac{4a}{5},\ \frac{75a^2}{14b},\ \frac{7a}{10},\ \frac{6a^2}{b},\ \text{\&c.}$$

demnach

$$1:\sqrt[3]{(a^3+b)} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\text{ꝛc.}}}}}$$

und

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\cfrac{1}{4a:5+\cfrac{1}{75a^2:14b+\text{ꝛc.}}}}}}$$

diese Quotienten geben nun Brüche, die sehr geschwinde sich dem wahren Werthe der Wurzel nähern. Wir wollen es für den Fall zeigen, wo es noch am langsamsten zugeht, weil wir a = b = 1 setzen wollen. Denn es ist klar, daß, wenn a > 1 und b < a ist, die Quo-

Quotienten merklich grösser werden. Setzen wir demnach a = b = 1, so ist $\sqrt[3]{(a^3+b)} = \sqrt[3]{2}$ folglich die Cubicwurzel von 2 zu suchen, welche = 1,259921 .... ist. Wir haben demnach

	140	0			
3	0	140	=	0 : 1	
1	140	420	=	1 : 3	= 0,333 ...
9:2	140	560	=	1 : 4	= 0,25
4:5	770	2940	=	11 : 41	= 0,268 ...
75:14	756	2912	=	27 : 104	= 0,2596 ...
7:10	4820	18540	=	241 : 927	= 0,259976 ...
6	4130	15890	=	59 : 227	= 0,259912 ...
ꝛc.	29600	113880	=	740 : 2847	= 0,2599227 ...

Demnach, wenn wir a = 1 addiren, die gesuchten Werthe

1, 333 ...
1, 25
1, 268 ...
1, 2596 ...
1, 259976 ...
1, 259912 ...
1, 2599227 ... ꝛc.

Die Quotienten, oder besser zu sagen, deren Coefficienten 3, 1, $\frac{9}{2}$, $\frac{4}{5}$, ꝛc. folgen nach einem gewissen Gesetze auf einander. Es sind nemlich die Glieder folgender Reihe

$$\frac{1.3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3.3.2}{1.4},\ \frac{2.4}{2.5},\ \frac{5.3.2.5}{1.4.7},\ \frac{2.4.7}{2.5.8},\ \frac{7.3.2.5.8}{1.4.7.10}\ \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{3}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{9.2}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{15.2.5}{4.7},\ \frac{4.7}{5.8},\ \frac{21.2.5.8}{4.7.10}\ \text{ꝛc.}$$

§. 30.

§. 30.

Man kann dieses Gesetz allgemeiner vorstellen, wenn man überhaupt die Wurzel

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}$$

in eine Reihe auflöset, und vermittelst dieser Reihe durch die Division die Quotienten sucht. Denn da findet man sie in folgender Ordnung

$$\frac{ma^{m-1}}{b},\ \frac{2}{m-1}a,\ 3.m.\frac{m-1}{m+1}.\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.}{m-1}.\frac{m+1}{2m-1}.a,$$

$$5m.\frac{m-1}{m+1}.\frac{2m-1}{2m+1}.\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.}{m-1}.\frac{m+1}{2m-1}.\frac{2m+1}{3m-1}.a, \text{ꝛc.}$$

diese geben demnach überhaupt

$$\sqrt[m]{(a^m+b)} = a + \cfrac{1}{ma^{m-1}:b + \cfrac{1}{2a:m-1 + \cfrac{1}{3.m.(m-1)a^{m-1}:(m+1)b + \&c.}}}$$

Man sieht zugleich hieraus, daß diese Quotienten bey jeder Wurzel wechselsweise zu- und abnehmen, und daß ihre Coefficienten nur bey der Quadratwurzel beständig $= 2$ sind. Setzt man für m, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ꝛc. so erhält man Dignitäten von (a^m+b), und da irgend einer der Quotienten anfängt unendlich zu werden, so wird die Reihe daselbst abgebrochen, und man erhält die Dignität ganz rein. Es sey z. E. $m = 2$, und $a = b = 1$, so sind die Coefficienten

$$+\tfrac{1}{2},\ -4,\ -\tfrac{1}{2},\ \infty.$$

Folg-

Folglich die Figur

$$\begin{array}{|r|l}
\underline{\qquad\qquad 4} & \ \underline{\ 0\ } \\
+1:2 - - - 0 & \ 4 \\
-4 - - + 4 & +2 = 2 \\
-1:2 - -16 & -4 = 4 \\
+12 & +4 = 3
\end{array}$$

demnach $(1+1)^2 = 1 + 3 = 4.$

§. 31.

Wir werden nun zu andern Reductionen der Brüche, und besonders der Decimalreihen fortschreiten. Wenn man mit einer Decimalreihe, wie z. E. mit 3, 1415926 .... oft zu multipliciren hat, und besonders wenn entweder große Zahlen, oder andere Decimalreihen damit solten multiplicirt werden, so ist ein solches Multipliciren, wegen der Weitläuftigkeit, beschwerlich. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, demselben abzuhelfen. So z. E. um bey eben dieser Reihe 3, 1415926 .... zu bleiben, welche dem Umkreis des Circuls ausdrückt, fand ich

$$3,1415926 \text{ ꝛc.} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000}$$

$$- \frac{1}{300000000} - \frac{1}{5000000000}$$

$$- \frac{1}{500000000000} + \frac{1}{40000000000000}$$

$$- \frac{1}{2000000000000000} - \text{ꝛc.}$$

Weiter

Weiter habe ich diese Reihe nicht verfolgt, weil man ohnehin selten bis auf 14 Decimalziffern rechnet. Man sieht sogleich und auf eine sehr klare Art daraus, um wie viel die archimedische Proportion, welche die ersten zwey Glieder dieser Reihe vorstellen, zu groß ist, um wie viel man noch fehlt, wenn man sie um $\frac{1}{800}$ des Diameters vermindert ꝛc. Es ist beynahe ganz unnöthig, daß ich die Methode hersetze, nach welcher ich diese Reihe gefunden. Denn da ich mir dabey vorgesetzt hatte, solche Brüche zu finden, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber eine ganz einfache Zahl mit angehenkten 0 seyn solten, damit man ohne Mühe dividiren könne, so war leicht voraus zu sehen, daß diese Nenner ohne alle Ordnung würden grösser werden, weil der Umstand, daß wir nur bis auf 9 zählen, ganz willkührlich ist, und mit der Quadratur des Circuls nichts zu thun hat. Das einige Mittel, so demnach übrig bliebe, war, daß ich die Ludolphischen Zahlen

$$3,141592653589,793238, \text{ꝛc.}$$

vor mich nahme, sodann erstlich 3 abzoge, und von dem Ueberreste, welcher beynahe $\frac{1}{7}$ war, zog ich $\frac{1}{7}$ ab. Da aber $\frac{1}{7}$ grösser ware als der Ueberrest, so sahe ich, daß dieser sodann von $3\frac{1}{7}$ muste abgezogen werden. Nun war dieser Ueberrest etwas grösser als $\frac{1}{800}$. Ich zoge demnach $\frac{1}{800}$ ab, und fand das Uebrigbleibende noch etwas grösser als $\frac{1}{70000}$. Dieses zoge ich demnach wiederum ab, und was übrig bliebe, war noch etwas grösser als $\frac{1}{5000000}$. Auf diese Art fuhr ich fort, bis der Ueberrest grösser als $\frac{1}{600000000000}$, und nur ein wenig kleiner als $\frac{1}{50000000000}$ war. Ich zoge denselben demnach von diesem letztern Bruche ab, und damit muste das Zeichen — in + verwandelt werden, weil mit $\frac{1}{50000000000}$ zu viel war weggenommen worden ꝛc.

§ 32.

Man sieht ohne mein Erinnern, daß es bey Ausfindung solcher Brüche eigentlich darum zu thun ist, daß die Anzahl der 0 in den Nennern geschwinde zunehme, damit man mit wenigern Theilungen weiter reiche. Hiezu kann man nun keine allgemeine Regel geben, theils weil man die Ueberreste bey solchen Brüchen nicht vorher sehen kann, theils weil es mehrere Anordnungen der Brüche giebt, die zuletzt dennoch auf eines hinaus laufen. So z. E. findet man

$$\frac{1}{3,1415926\text{ꝛc.}} = 0,3183098861837906 57153 \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000} - \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{ꝛc.}$$

oder auch

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{50} + \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{2c.}$$

Denn es ist

$$\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{1000} = \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{200}.$$

Man wird eben so auch die Reihe

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{80000}$$

$$- \frac{1}{5000000} - \frac{1}{30000000} + \frac{1}{2000000000}$$

$$- \frac{1}{30000000000} + \text{2c.}$$

finden, welche eben den Werth giebt, und von den beyden vorhergehenden, von dem zweyten Gliede an, ganz verschieden ist.

§. 33.

Diese Reihen sind nun in dem Gebrauche sehr vortheilhaft. Man sieht mit einem male, bis auf die wievielste Decimalstelle jeder Bruch reicht, und wie viele Theilungen man folglich vorzunehmen hat, um zu einem fürgegebenen Grade der Genauigkeit zu gelangen. Wer überdies leicht im Rechnen geübt ist, dem fällt es nicht schwerer mit einer Ziffer zu dividiren, als zu multipliciren, und er gebraucht kein besonder Blatt dazu, um jeden Quotienten zu finden.

§. 34.

Indessen ist eben diese Leichtigkeit Schuld daran, daß diese Reihen weniger convergiren, als es an sich geschehen könnte. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, jede Decimalreihe, oder auch andere Brüche, in solche Brüche aufzulösen, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber in der grösten möglichen Verhältniß der Ordnung nach grösser seyn. Diese Auflösung geht nun stuffenweise von statten, und die Bedingung, daß alle Zähler sollen $= 1$ seyn, giebt die Methode von selbst an. Es sey z. E. der Bruch $\tfrac{94}{127}$. Da dieser nun näher bey 1 als bey $\tfrac{1}{2}$ ist, so wird er von 1 abgezogen, demnach

$$\frac{94}{127} - \frac{127}{127} = \frac{33}{127}.$$

Nun ist $\tfrac{33}{127}$ näher bey $\tfrac{1}{4}$ als bey $\tfrac{1}{3}$. Man zieht demnach $\tfrac{1}{4}$ davon ab, und so ist

$$\frac{33}{127} - \frac{1}{4} = \frac{132 - 127}{4.127} = \frac{5}{508}.$$

Eben so ist dieser neue Ueberrest $\tfrac{5}{508}$ näher bey $\tfrac{1}{102}$ als bey $\tfrac{1}{101}$, man zieht demnach $\tfrac{1}{102}$ davon ab, und so ist

$$\frac{5}{508} - \frac{1}{102} = \frac{510 - 508}{508.102} = \frac{1}{508.51} = \frac{1}{4.127.51}$$

demnach wenn man nun den Rückweg nimmt

$$\frac{5}{508} = \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{33}{127} = \frac{1}{4} + \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{94}{127} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{102} - \frac{1}{4.127.51}.$$

§. 35.

Wiederum, es sey $\frac{355}{113}$ in eine solche Reihe von Brüchen aufzulösen, so macht man erstlich

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$$

sodann, weil $\frac{16}{113}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächsten kömmt

$$\frac{16}{113} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{791} = -\frac{1}{7.113}.$$

Da nun der Ueberrest $\frac{1}{791}$ schon 1 zum Zähler hat, so gebraucht es keiner weitern Auflösung, und es ist ganz kurz

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113}$$

Man sieht hieraus, um wie viel die Metianische Proportion des Umkreises zum Diameter von der Archimedischen verschieden ist. Kehrt man den Bruch $\frac{355}{113}$ um, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{113}{355} - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3.355} = -\frac{16}{1065}$$

$$\frac{16}{1065} - \frac{1}{67} = +\frac{7}{67.1065} = +\frac{7}{71355}$$

$$\frac{7}{71355} - \frac{1}{10194} = +\frac{3}{10194.71355} = \frac{1}{242464290}$$

folglich

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3} - \frac{1}{67} - \frac{1}{10194} - \frac{1}{242464290}.$$

Man sagt nemlich: 113 in 355 geht 3 mal, und es bleiben 16 übrig. 16 in 3 mal 355, oder 1065 geht 67 mal, und es fehlen 7. Endlich 7 in 67 mal 1065, oder 71355 geht 10194 mal, und es fehlen 3. Dieses 3 in 10194 mal 71355 geht genau 242464290 male. Und damit sind die Nenner 3, 67, 10194 und 242464290 gefunden.

§. 36.

Bey den Decimalreihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art, nur daß man die Brüche, so man herausbringt, in Decimalreihen verwandelt, um zu finden, wie nahe sie dem wahren Werthe der Reihe kommen, und was noch entweder hinzu zu setzen oder weg zu nehmen ist. So z. E. ist für die Ludolphische Zahlen

	$\pi =$	$3,14159265358979323 8$ 2c.
A	$3\frac{1}{7} =$	$3,14285714285714285 7$ 2c.
a		$-0,00126448926734961 8$ 2c.
B	$-\frac{1}{791} =$	$12642225031517 06$ 2c.
b		$-2667641979 11$ 2c.
C	$-\frac{1}{3748629} =$	$2667641956 56$ 2c.
c		2255 2c.
D	$-\frac{1}{4433840233 62059} =$	2255 2c.

Hier müssen nemlich die Brüche B, C, D aus den Ueberresten a, b, c gefunden werden, indem man 1 durch dieselben dividirt. Man hat nicht nöthig hiezu die ganze Reihen a, b, c zu nehmen, sondern es ist genug, wenn man von den ersten Zahlen derselben so viel nimmt als nöthig ist, die Quotienten, soweit diese ganze Zahlen sind, zu bestimmen. Sind auf diese Art die Brüche A, B, C, D gefunden, so verwandelt man sie in Decimalreihen, um sie sodann abzuziehen. Ich habe, um diese Brüche zu finden, von der Reyhe π in allem 30 Decimalstellen zur Rechnung genommen, und fand demnach, daß die Formel

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{791}-\frac{1}{3748629}-\frac{1}{443384023362059}\text{ 2c.}$$

die Ludolphische Zahlen bis auf die 28te Decimalstelle richtig giebt. Die zwey ersten Glieder geben die Archimedische Proportion $\frac{22}{7}$, die drey ersten aber

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{791}=3+\frac{113-1}{791}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$$

geben die Metianische $\frac{355}{113}$. Man sieht also hieraus, daß unter den kleinern Verhältnissen diese beyden die genauesten sind, und daß von der Metianischen bis zur nächst grösseren ein merklicher Sprung ist.

§. 37.

Die Reihen von Brüchen, in welche man auf diese Art jede Decimalreihe verwandeln kann, sind nun diejenigen, die unter allen am geschwindesten convergiren. Es haben aber diese Brüche in der Art, wie sie auf einander folgen, kein Gesetz unter sich. Die Nenner haben zuweilen Theiler, zuweilen sind es Primzahlen, und jede Reihe hat, in Ansehung des Convergirens, etwas besonders. Es kommt viel darauf an, daß schon der erste Bruch dem wahren Werthe der Reihe sehr nahe komme. Denn man sieht leicht, daß wenn man in unserm Beyspiele anstatt der Reihe A, welche $\frac{22}{7}$ ist, gleich anfangs $\frac{355}{113}$ als die Summe beyder Reihen A, B genommen hätte, der folgende Bruch unmittelbar würde C gewesen seyn. Die Anzahl der Ziffern in dem Nenner eines jeden folgenden Bruches wird immer doppelt, und mehrentheils um eine Ziffer mehr als doppelt grösser. Es kann auch in einigen Fällen geschehen, wo ein Nenner weit über doppelt mehr Ziffern bekömmt, als der nächst vorhergehende. Dieses geschieht aber gleichsam nur zufälliger Weise, wenn man nemlich eine solche Reihe vor sich hat, welche einem gewissen Bruche beynahe gleich ist.

§. 38.

Wenn man nicht so genau darauf sieht, daß solche Reihen unter allen am geschwindesten convergiren, so lassen sich solche finden, die nach gewissen Gesetzen fortgehen. So z. E. es sey die Frage jede Decimalreihen in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{a.\,b} + \frac{1}{a.\,b.\,c} + \frac{1}{a.\,b.\,c.\,d} + \text{2c.}$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, daß a, b, c, d &c. ganze Zahlen seyn, und die Reihe unter allen von dieser Art am geschwindesten convergire. Die Auflösung dieser Aufgabe hat nun ebenfalls gar keine Schwürigkeit, und wir können sogleich anfangen, sie in einem Beyspiele zu zeigen, wozu wir ebenfalls wiederum die Ludolphischen Zahlen nehmen werden. Die Rechnung ist demnach folgende

$$\begin{array}{rcl}
\pi & = & 3,141592,653589,793238,462643,38 \text{ 2c.} \\
3+\frac{1}{7} & = & \underline{3,142857,142857,142857,142857,14 \text{ 2c.}} \\
M & = & -\ 1264,489267,349618,680213,76 \text{ 2c.} \\
A = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{113} & = & \underline{1264,222503,151706,700379,27 \text{ 2c.}} \\
N & = & -\ 266764,197911,979834,49 \text{ 2c.} \\
B = \frac{A}{4739} & = & \underline{266769,867725,618632,49 \text{ 2c.}} \\
O & = & +\ 5,669813,638798,00 \text{ 2c.} \\
C = \frac{B}{47051} & = & \underline{5,669802,293800,74 \text{ 2c.}} \\
P & = & +\ 11,344997,26 \text{ 2c.} \\
D = \frac{C}{499762} & = & \underline{11,345004,81 \text{ 2c.}} \\
Q & = & -\ 7,55 \text{ 2c.} \\
\text{2c.} & &
\end{array}$$

folglich

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.47051} + \frac{1}{7.113.4739.47051.499762} - \text{2c.}$$

Man dividirt nemlich $\frac{1}{7}$ durch den ersten Ueberrest M, um den Nenner 113 zu finden. Sodann theilt man $\frac{1}{7}$ durch 113, um die Reihe A zu finden. Diese wird von M abgezogen, und so erhält man den zweyten Ueberrest N. Sodann giebt die Theilung $\frac{A}{N}$ den Nenner 4739, und $\frac{A}{4739}$ die Reihe B, welche von N abgezogen, den 3ten Ueberrest O giebt, mit welchem man auf eine ganz ähnliche Art verfährt 2c.

π =

§. 39.

§. 39.

Die Reihen, die man nach dieser Methode findet, haben den Vortheil, daß man sogleich sieht, wie vielmal jeder Bruch kleiner ist, als der nächst vorhergehende, und daß man bey ihrem Gebrauche nicht mit so grossen Zahlen zu dividiren hat, weil jedes Glied durch das nächst vorhergehende gefunden werden kann. Jeder neue Factor hat wenigstens so viel, mehrentheils aber mehr Ziffern, als der nächst vorhergehende. Lezters hängt von der besondern Art der Reihe ab, die man in solche Brüche aufzulösen vornimmt. Daher findet sich in Ansehung des Convergirens ein merklicher Unterschied. So z. E. findet man

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} - \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe convergirt demnach merklich langsamer als die, so wir erst für π gefunden.

§. 40.

Will man Brüche in solche Reihen auflösen, so kann es nach einer gewissen mechanischen Methode geschehen, welche wir durch das Beyspiel des Bruches $\frac{5341}{7837}$ erläutern wollen. Die Figur ist folgende

5341

$$\begin{array}{r|r|l}
5341 & 7837 & 1 \\
 & 5341 & \\
-2496 & 7837 & 3 \\
 & 7488 & \\
+349 & 7837 & 22 \\
 & 7678 & \\
-159 & 7837 & 49 \\
 & 7791 & \\
+46 & 7837 & 170 \\
 & 7820 & \\
-17 & 7837 & 461 \\
 & 7837 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Dieses giebt nun

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

Man dividirt nemlich den Nenner durch den Zähler, und sodann durch jeden Ueberrest, um die Quotienten 1, 3, 22, 49, 170, 461 zu finden. Nun ist

$$1 - \frac{2496}{7837} = \frac{5341}{7837}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{349}{3\cdot 7837} = \frac{2496}{7837}$$
$$\frac{1}{22} - \frac{159}{22\cdot 7837} = \frac{349}{7837}$$
$$\frac{1}{49} - \frac{46}{49\cdot 7837} = \frac{159}{7837}$$
$$\frac{1}{170} - \frac{17}{170\cdot 7837} = \frac{46}{7837}$$
$$\frac{1}{461} - \frac{0}{461\cdot 7837} = \frac{17}{7837}$$

Denn

Denn es sey der Nenner $= B$, ein jeder Ueberrest $= Q$, B durch Q getheilt gehe m mal, und lasse R übrig, so ist

$$mQ = B - R$$

demnach

$$\frac{mQ}{B} = 1 - \frac{R}{B}$$

$$\frac{Q}{B} = \frac{1}{m} - \frac{R}{m.B}$$

Es ist daher, wenn man nach und nach substituirt,

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{2496}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{349}{3.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{159}{3.22.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{46}{3.22.49.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{17}{3.22.49.170.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

§. 34.

In diesem Beyspiele hat es sich schicklich eräugnet, daß jeder Ueberrest kleiner als die Hälfte desjenigen war, welcher zum Dividiren genommen worden, und dieses machte, daß in der herausgebrachten Reihe die Zeichen — + einförmig abwechselten. Es giebt aber ungleich mehr Brüche, wo die Ueberreste bald grösser, bald kleiner sind, als die Hälfte der Theiler. Will man nun eine Reihe haben, die am geschwindesten convergirt; so muß man in allen den Fällen, wo ein Ueberrest grösser seyn würde, als die Hälfte des Theilers, den Quotienten um 1 grösser nehmen. Dadurch wird der Ueberrest negativ, und zugleich kleiner als die Hälfte des Theilers, und damit muß das Zeichen verwechselt werden. Es sey z. E. der Bruch $\frac{4142136}{10000000}$, so haben wir folgende Figur

4142136	10000000	2			
	8284272				
	— 1715728	10000000	6		
		10294368			
		— 294368	10000000	34	
			10008512		
			— 8512	10000000	1175
				10001600	
				— 1600	

1600	10000000	6250
	10000000	
	0	

folglich

$$\frac{4142136}{10000000} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175} - \frac{1}{2.6.34.1175.6250}$$

Es ist demnach

$$\sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34}$$

$$- \frac{1}{2.\,6.\,34.\,1175} - \text{ꝛc.}$$

Da hier von den zweyten an, alle Quotienten um 1 grösser genommen worden, so sind auch alle Zeichen von dem zweyten an — geblieben.

§. 42.

Wiederum es sey 0,8660254 der Tabellarsinus von 60 Gr. in solche Brüche zu verwandeln, so ist

$$\begin{array}{r|r|l}
8660254 & 10000000 & 1 \\
 & 8660254 & \\
\hline
-1339746 & 10000000 & 7 \\
 & 9378222 & \\
\hline
+621778 & 10000000 & 16 \\
 & 9948608 & \\
\hline
-51392 & 10000000 & 195 \\
 & 10021440 & \\
\hline
 & -21440 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
-21440 & 10000000 & 466 \\
 & 9991040 & \\
\hline
+8960 & 10000000 & 1116 \\
 & 9999360 & \\
\hline
-640 & 10000000 & 15625 \\
 & 10000000 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Hier

Hier ist der einige Quotient 195 um 1 grösser genommen worden, demnach ist auch nur bey dessen Ueberrest keine Verwechselung des Zeichens vorgegangen. Es ist demnach

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7.16} - \frac{1}{7.16.195} - \frac{1}{7.16.195.466}$$

$$+ \frac{1}{7.16.195.466.1116} - \frac{1}{7.16.195\;466.1116.15625}$$

hiebey kann man die drey letzten Glieder, als welche kleiner als 0,0000001 sind, weglassen, weil wir den Sinus von 60 Gr. selbst nicht genauer genommen haben.

§. 43.

Auf diese Art verfährt man demnach, wenn Brüche oder Decimalreihen in solche Reihen

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \&c.$$

aufzulösen sind, die am geschwindesten convergiren. Will man aber von dieser Bedingung abgehen, so kann jeder Bruch und jede Decimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach andern Absichten eingerichtet werden können. Man setze z. E. jeder von den Factoren a, b, c, d &c. sollen eine Zahl aus der Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 ꝛc.

seyn, so wird diese Absicht auf eine ganz ähnliche Art erhalten werden können. Wir wollen

len in Ansehung des hyperbolischen Logarithmus von 10, welcher $= 2,30258509299404568$ ꝛc. ist, ein Beyspiel geben. Es ist demnach

$$
\begin{array}{rl}
\log. 10 = & 2,302585092994 \text{ ꝛc.} \\
 & -2,000000000000 \text{ ꝛc.} \\
\hline
A = & +0,302585092994 \text{ ꝛc.} \\
a = \frac{1}{3} = & 0,333333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
B = & -30748240339 \text{ ꝛc.} \\
b = \frac{1}{10}a = & 33333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
C = & +2585092994 \text{ ꝛc.} \\
c = \frac{1}{10}b = & 3333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
D = & -748240339 \text{ ꝛc.} \\
d = \frac{1}{4}c = & 833333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
E = & +85092994 \text{ ꝛc.} \\
e = \frac{1}{10}d = & 83333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
F = & +1759660 \text{ ꝛc.} \\
f = \frac{1}{5}e = & 1666666 \text{ ꝛc.} \\
\hline
G = & +92994 \text{ ꝛc.} \\
g = \frac{1}{20}f = & 83333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
H = & +9660 \text{ ꝛc.} \\
h = \frac{1}{9}g = & 9259 \text{ ꝛc.} \\
\hline
I = & +401 \text{ ꝛc.} \\
i = \frac{1}{20}h = & 462 \text{ ꝛc.} \\
\hline
K = & -61 \text{ ꝛc.} \\
 & \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

folglich

folglich

$$
\log 10 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.10} + \frac{1}{3.10.10} - \frac{1}{3.10.10.4} + \frac{1}{3.10.10.4.10} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9.20} - \text{ꝛc.}
$$

§. 44.

Man kann auf eine ähnliche Art die Auflösung einer Decimalreihe so anstellen, daß die Nenner oder Factores lauter Quadrat, Cubic ꝛc. Trigonal ꝛc. oder Zahlen aus einer fürgegebenen Reihe sind. Man wird aber, ungeachtet es an sich nicht unmöglich ist, nicht leicht auf eine solche Auflösung verfallen, da die Factores nach einem einförmigen Gesetze auf einander folgen, daferne man dieses nicht voraus weiß. Denn so z. E. giebt es allerdings eine Reyhe, deren Factores der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. sind; man muß aber voraus wissen, daß es die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist. Denn so hat man

$$
\begin{array}{rl}
 & 2,718281828459 \\
 & 2 \\
\hline
 & 0,718281828459 \\
a = \frac{1}{2} = & 0,500000000000 \\
\hline
 & 0,218281828459 \\
b = \frac{1}{3}a = & 0,166666666666 \\
\hline
 & 0,051615151793 \\
c = \frac{1}{4}b = & 41666666666 \\
\hline
 & 0,009948485126 \\
d = \frac{1}{5}c = & 0,008333333333 \\
\hline
 & 0,001615151793 \\
 & \text{2c.}
\end{array}
$$

§. 45.

Bey diesen so gar vielen Möglichkeiten die Decimalreihen und Brüche in Reihen zu verwandeln, welche entweder unter allen am geschwindesten, oder doch nach beliebigen Gesetzen, sehr geschwinde convergiren, wäre es sehr zu wünschen, daß die dabey gebrauchte Methode auch bey den algebraischen unendlichen Reihen mit eben so gutem Fortgange angebracht werden könnte. Man weiß, daß wenn man mit dem Integriren einer Differentialformel nicht fortkommen kann, das letzte Mittel dieses ist, daß man sie in eine unendliche Reihe auflöset, und sodann jede Glieder derselben besonders integrirt. Es geschieht aber selten, daß solche Reihen in allen Fällen sehr convergent wären, und um destomehr wäre es gut, sie in solche ver-

verwandeln zu können, die unter allen am geschwindesten convergirten. Will man aber mit solchen Reihen Divisionen vornehmen, wie wir es vorhin (§. 40.) mit den Brüchen gethan haben, so kann man sich dabey weder von dem grösten Quotienten, noch von dem kleinsten Ueberreste versichern, weil sich die Glieder, die verschiedene Exponenten haben, nicht so unbedingt addiren und subtrahiren lassen. Man kann dabey nur die Glieder, so gleiche Exponenten haben, mit einander vergleichen, und man hat bey dem Dividiren nur diese Wahl, ob die Quotienten aus 1, 2, 3 2c. Gliedern bestehen sollen. Die Probe, so ich hierüber angestellt, hat mich gelehrt, daß, wenn man sich mit eingliedrigen Quotienten begnügen will, man nichts ausrichtet, weil man statt einer mehr convergirenden Reihe gerade diejenige wieder bekömmt, die man hatte verwandeln wollen. Es sey z. E. die Reihe

$$y = \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \&c.}{1}$$

in Form eines Bruches vorgestellt, dessen Nenner $= 1$ ist. Dividirt man nun 1 durch $ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$ so ist der Quotient $= \frac{1}{ax}$ der Ueberrest $= -\left(\frac{bx}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx^3}{a} + \&c.\right)$ Wird durch diesen Ueberrest wiederum 1 dividirt, so ist der Quotient $= -\frac{a}{bx}$, der Ueberrest $= -\left(\frac{cx}{b} + \frac{dx^2}{b} + \&c.\right)$ Fährt man auf gleiche Art fort, so werden der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{ax}, -\frac{a}{bx}, -\frac{b}{cx}, -\frac{c}{dx}$ &c. erhalten. Und diese geben demnach die Reihe

$$y = ax + ax.\frac{bx}{a} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b}.\frac{dx}{c} + \text{2c.}$$

welcher sich offenbar in die fürgegebene

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

verwandelt. Es sind demnach die auf diese Art gefundene eingliedrige Quotienten nicht nur nicht die Grösten, sondern weder grösser noch kleiner als diejenigen, welche die Anfangs fürgegebene Reihe wieder herfür bringen.

§. 46.

Ich habe hierauf eine Probe mit Quotienten von zweyen Gliedern vorgenommen, weil es sich voraus sehen liesse, daß diese allerdings grösser als die eingliedrigen seyn, und sich nicht gegen einander wieder aufheben würden. Ich nahm zu diesem Ende die Leibnitzische Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{2c.}$$

diese in 1 dividirt, gieng $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right)$mal, und der Ueberrest wäre

$$-\frac{4}{45}x^4 + \frac{8}{105}x^6 - \frac{12}{189}x^8 + \frac{16}{297}x^{10} - \frac{20}{13.33}x^{12} + \text{2c.}$$

dieser

dieser wiederum in 1 dividirt gieng $\div\left(\frac{45}{4xxxx} + \frac{135}{14xx}\right)$mal, und der Ueberrest war

$$+\frac{1}{49}x^4 - \frac{10}{33.49}x^6 - \frac{5}{7.11.13}x^8 + \frac{12}{7.11.13}x^{10}\ \&c.$$

dieser nochmals in 1 dividirt, gabe $\left(\frac{49}{x^4} + \frac{49.10}{33x^2}\right)$, und der Ueberrest war

$$+\frac{953.5}{11.13.99}x^4 - \frac{173}{11.13.33}x^6\ \&c.$$

Dadurch erhielte ich nun nach gehöriger Reduction der Quotienten

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{3x}{3+xx}.\frac{56x^4}{630+540x^2} - \frac{3x}{3+xx}.\frac{56x^4}{630+540xx}.\frac{33x^4}{1617+490xx}$$

oder nach geschehener Verkleinerung der Brüche

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{1}{(3+xx)}.\frac{28x^5}{(105+90xx)} - \frac{44x^9}{(3+xx).(35+30xx).(231+70xx)}\ \text{2c.}$$

Diese Reihe convergiret demnach schon merklicher, als die fürgegebene. Setzt man z. E. $x = 1$, so erhält man

$$y = \tfrac{3}{3} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{19565} - \text{2c.}$$

Setzt man $x = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, so findet sichs

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{9}{10} + \tfrac{14}{2025} - \tfrac{22}{1545075} + \text{2c.}\right)$$

Setzt man $x = 2$, so ist

$$y = \tfrac{6}{7} + \tfrac{128}{465} - \tfrac{22528}{544435} + \text{2c.}$$

 wor-

woraus man sieht, daß diese Reihe auch in denen Fällen noch convergirend bleibt, in welchen die Leibnitzische divergent wird.

§. 47.

Eben diese Probe mit Quotienten von drey Gliedern fiel so aus. Die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7} + x^7 +$ rc. in 1 dividirt, gieng $(1{:}x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3)$mal, und der Ueberrest war

$$+\frac{44}{27\cdot35}+x^6-\frac{8}{7\cdot25}x^8+\frac{428}{9\cdot33\cdot35}x^{10} \text{ rc.}$$

dieser Ueberrest wiederum in 1 getheilt, gieng

$$\frac{27\cdot35}{44x^6}+\frac{27.27.7}{11.11.2.x^4}+\frac{241.3.7.9}{121.44.5x^2}$$

mal rc. Demnach wenn man diese Brüche unter einen gemeinen Nenner bringt; so war der erste Quotient $= \frac{45+15x^2-4x^4}{45x}$

der zweyte $= \frac{571725+561330x^2+45549x^4}{26620x^6}$ rc.

Demnach haben wir

$$y = \frac{45x}{45+15x^2-4x^4} - \frac{45x}{45+15x^2-4x^4}\cdot\frac{26620x^6}{571725+561330x^2+45549x^4}.$$

§. 48.

Um nun diese Reihe mit der vorhergehenden (§. 46.) zu vergleichen, so bemerke ich, daß mehr nicht als die sechs ersten Glieder der Leibnitzischen

nitzischen Reihe

$$z - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}$$

gebraucht worden, um bey der Reihe des §. 46. die drey ersten, bey der Reihe des §. 47. die zwey ersten Glieder heraus zu bringen. Denn weiter wolte ich die Rechnung ohnehin nicht verfolgen, weil dieses schon genug war, um zu sehen, wiefern die beyden heraus gebrachten Reihen convergiren würden. Ich setzte demnach $x = \frac{1}{2}$, und die drey ersten Glieder der Reihe des §. 46. gaben

$$\frac{6}{13}+\frac{7}{3315}+\frac{11}{4393480}=0{,}4636475717\ldots$$

hingegen die zwey ersten Glieder der Reihe des §. 47. gaben

$$\frac{45}{97}-\frac{33275}{123281277}=0{,}4636476145\ldots$$

Nun aber ist die Länge des Bogens, dessen Tangente $= \frac{1}{2}$ ist,

$$y = 0{,}4636476056\ldots$$

demnach ist der erste Ausdruck um 0,000 000 0339 ... zu klein, der andere aber um 0,000 000 0089 zu groß. Man sieht hieraus, daß beyde Reihen beträchtlich convergiren; für $x = 1$, geben die drey ersten Glieder (§. 46)

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{105}-\frac{11}{19505}=0{,}7853352$$

die zwey ersten Glieder (§. 47.)

$$\frac{45}{56}-\frac{33275}{1833364}=0{,}7854217$$

Nun ist der Bogen selbst $y = 0{,}7853982 -$ demnach ist der erste Ausdruck um 0,0000629 zu zu klein, der andere aber um 0,0000235 zu groß. Man hätte von der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

eine beträchtliche Anzahl von Gliedern addiren müssen, um den Bogen so weit zu finden, daß der Fehler kleiner als 0,0001 gewesen wäre.

§. 49.

Da übrigens der Unterschied zwischen beyden Methoden nicht sehr groß ist, so werden wir bey den zweygliedrigen Quotienten bleiben, und dafür eine allgemeine Formel suchen, woraus sich sodann die Bedingungen ergeben, unter welchen die dadurch herausgebrachte Reihe am meisten convergirt. Es sey demnach die Reihe

$$y = a x^{m} + b x^{m+n} + c x^{m+2n} + d x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Wird diese in 1 dividirt, so ist der Quotient

$$= \frac{1}{a x^{m}} - \frac{b x^{n}}{a a x^{m}} = \frac{a - b x^{n}}{a a x^{m}}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{bb - ca}{aa} x^{2n} + \frac{bc - da}{aa} x^{3n} + \frac{bd - ea}{aa} x^{4n} + \frac{be - fa}{aa.} x^{5n} + \&c.$$

für diesen setze man Kürze halber

$$A x^{2n} + B x^{3n} + C x^{4n} + D x^{5n} + \&c.$$

Dividirt man nun wiederum 1 durch diesen Ueberrest, so ist der zweyte Quotient =

$$= \frac{1}{A x^{2n}} - \frac{B x^{n}}{A A x^{2n}} = \frac{A - B x^{n}}{A A x^{2n}}$$

und der zweyte Ueberrest

$$= \frac{BB - CA}{AA} x^{2n} + \frac{BC - DA}{AA} x^{3n} + \frac{BD - EA}{AA} x^{4n} + \&c.$$

Setzt man diesen ebenfalls Kürze halber

$$= \alpha x^{2n} + \beta x^{3n} + \gamma x^{4n} + \delta x^{5n} + \&c.$$

und nimmt die dritte Division vor, so wird wiederum der Quotient

$$= \frac{1}{\alpha x^{2n}} - \frac{\beta x^{n}}{AA x^{2n}} = \frac{\alpha - \beta x^{n}}{\alpha \alpha x^{2n}}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha} x^{2n} + \frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{\alpha\alpha} x^{3n} + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\alpha} x^{4n} + \text{ꝛc.}$$

seyn ꝛc. Da auf diese Art jede folgende Quotienten und Ueberreste einerley Form haben, so sieht man, wie sie, ohne in jeden besondern Fällen die Division vorzunehmen, vermittelst dieser Formeln aus einander hergeleitet und berechnet werden können. Wir haben demnach statt der fürgegebenen Reihe, folgende

$$y = \frac{a a x^{m}}{a - b x^{n}} - \frac{a a x^{m}}{a - b x^{n}} \cdot \frac{A A x^{2n}}{A - B x^{n}} + \frac{a a x^{m}}{a - b x^{n}} \cdot \frac{A A x^{2n}}{A - B x^{n}} \cdot \frac{\alpha \alpha x^{2n}}{\alpha - \beta x^{n}} - \&c.$$

§. 50.

Diese Reihe wird nun offenbar abgebrochen, und in einem endlichen Ausdruck verwandelt, wenn einer von den Factoren A, α &c. $= 0$ wird. Man setze z. E. $A = 0$. Da nun

$$A = \frac{bb - ca}{aa}$$

ist, so ist $bb - ca = 0$,

folglich $a : b = b : c$.

Wenn demnach in der fürgegebenen Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder gleich sind, oder überhaupt in einer geometrischen Progression fortgehen, so wird $A = 0$ &c. und man hat schlechthin

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n}$$

In der That giebt auch dieser Ausdruck, wenn man ihn in eine Reihe auflößt, eine geometrische Progression. Wir können hieraus die Folge ziehen, daß die herausgebrachte Reihe destomehr convergirt, jemehr die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder der Gleichheit, oder einer jeden geometrischen Progression nahe kommen.

§. 51.

Setzt man ferner $\alpha = 0$, so erhellet auf eben diese Art, daß

$$A : B = B : C$$

sey; folglich wird die Formel bey dem zweyten Gliede

Gliede abgebrochen, wenn die Coefficienten des ersten Ueberrestes entweder einander gleich sind, oder in einer geometrischen Progression fortgehen. Ein gleiches hat auch für jeden folgenden Ueberrest statt.

§. 52.

Nun sind die meisten von denen Reihen, die langsamer convergiren, von der Art, daß die Coefficienten a, b, c, d &c. immer weniger von einander unterschieden sind. Wenn man daher die ersten Glieder solcher Reihen für sich addirt, und die folgenden nach der erst angegebenen Methode behandelt, so wird man ungleich geschwinder dem wahren Werthe der Reihe näher kommen, als wenn man bey den ersten Gliedern angefangen hätte. Wir wollen dieses ebenfalls durch das Beyspiel der Leibnitzischen Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{rc.}$$

erläutern. Nimmt man von dieser die fünf ersten Glieder besonders, so sind die folgenden

$$-\left(\tfrac{1}{11}x^{11} - \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{15}x^{15} - \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{1}{19}x^{19} - \tfrac{1}{21}x^{21} + \text{rc.}\right)$$

demnach

$$a = +\frac{1}{11} \qquad b = -\frac{1}{13} \qquad m = 11$$

$$c = +\frac{1}{15} \qquad d = -\frac{1}{17} \qquad n = 2$$

$$e = +\frac{1}{19} \qquad f = -\frac{1}{21}$$

&c.

Diese

Diese Werthe in den Formeln des §. 49. gesetzt, geben den ersten Quotienten

$$=+\frac{11(13+11x^2)}{13x^{11}}$$

und den ersten Ueberrest

$$-\frac{11.4}{13.13.15}x^4+\frac{11.8}{13.15.17}x^6-\frac{11.12}{13.17.19}x^8+\frac{11.16}{13.19.21}x^{10}-\text{ꝛc.}$$

demnach

$$A=-\frac{11.4}{13.13.15}\qquad B=+\frac{11.8}{13.15.17}$$

$$C=-\frac{11.12}{13.17.19}\qquad D=+\frac{11.16}{13.19.21}$$

ꝛc.

Hieraus erhält man den zweyten Quotienten

$$=-\frac{15.13.13\,(17+2.13x^2)}{4.11.17.x^4}$$

und den zweyten Ueberrest

$$+\frac{13.223}{17.17.19}x^4-\frac{13.15.482}{17.17.19.21}x^6+\text{ꝛc.}$$

demnach

$$\alpha=\frac{13.223}{17.17.19}\qquad \beta=-\frac{13.15.482}{17.17.19.21}$$

ꝛc.

welches den dritten Quotienten

$$=+\frac{17.17.19.(1561+2410x^2)}{7.13.223.223.}$$

giebt ꝛc.

giebt ꝛc. Demnach haben wir

$$y=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9-\frac{13x^{11}}{143+121xx}$$

$$-\frac{13.x^{11}}{(143+121x^2)}\cdot\frac{4.11.17.x^4}{15.13.13\,(17+26xx)}$$

$$+\frac{13.x^{11}}{143+121xx}\cdot\frac{4.11.17.x^4}{15.13.13\,(17+26x^2)}\cdot$$

$$\frac{7.13.223.223.x^4}{17.17.19.(1561+2410xx)}-\text{ꝛc.}$$

Diese Glieder geben, wenn man $x=1$ setzt, für den halben Quadranten 0, 785399582 ꝛc. welches von dem wahren Werthe nur um 0, 0000014 verschieden ist.

§. 53.

Bey der Reihe

$$\sqrt{(1+x)}=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{128}x^4$$
$$+\tfrac{7}{256}x^5-\tfrac{21}{1024}x^6+\tfrac{33}{2048}x^7-\text{ꝛc.}$$

kann man bey dem zweyten Gliede anfangen, weil von diesem an die Zeichen ordentlich abwechseln. Und so wird man

$$\sqrt{(1+x)}=1+\frac{2x}{4+x}+\mathfrak{A}.\frac{xx}{16+12x}-\mathfrak{B}.\frac{xxx}{64+96x}$$
$$+\mathfrak{C}.\frac{81.xx}{16(9+13x)}-\mathfrak{D}.\frac{625.625.xx}{16.81(625+807x)}$$
$$+\text{ꝛc.}$$

erhalten, wobey Kürze halber die Factores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. die nächst vorhergehenden Glieder bedeu-

bedeuten, und $\mathfrak{B}$ deswegen mit xxx multiplicirt ist, weil es sich hier zuträgt, daß bey der zweyten Division das erste Glied des Ueberrestes $= 0$ wird. Diese Reihe ist zur Ausziehung der Quadratwurzel sehr bequem. Es solle z. E. aus 2916 die Quadratwurzel ausgezogen werden, welche $= 54$ ist. Wir wollen dafür 53 nehmen, und so läßt das Quadrat von $53 = 2809$ von 2916 abgezogen, 107 übrig. Demnach haben wir

$$53\,\sqrt{\left(1+\tfrac{107}{2890}\right)} = 53\,\sqrt{(1+x)}$$

und damit die Reihe

$$\sqrt{(2916)} = 53\left(1+\frac{214}{11343}+\frac{214}{11343}\cdot\frac{11449}{2809.\,36228}-\text{etc.}\right)$$

Da nun hier schon das dritte Glied kleiner als $\frac{1}{600000}$, das vierte aber noch

$$1:\left(\frac{107}{2890}\right)^3\cdot\frac{1}{64+\dfrac{96.\,107}{2890}}$$

mal, das ist über 1500000 mal kleiner ist, so sieht man leicht, daß man es mehrentheils bey den zwey ersten Gliedern der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1+\frac{2x}{4+x}$$

kann bewenden lassen.

§. 54.

Für die Cubicwurzel findet man auf eine ähnliche Art

$\sqrt[3]{(1}$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1+\frac{x}{3+x}+\mathfrak{A}.\frac{4xx}{9(6+5x)}$$
$$-\mathfrak{B}.\frac{xx}{4(9+4x)}+\text{etc.}$$

und für jede Wurzel überhaupt

$$(1+x)^n = 1+\frac{2nx}{2-(n-1)x}-\frac{(n-1)(n+1)x^2.\mathfrak{A}}{12-6(n-2)x}$$
$$+\frac{(2n-1)^2.(n-2)x^2.\mathfrak{B}}{60(2n-1)-(n-3).(5n-2).10.x}-\text{etc.}$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel $n = \frac{1}{2}$, welches für die Quadratwurzel ist, so wird das dritte Glied $= 0$, und eben so auch die folgende Glieder. Wir haben aber schon in den vorhergehenden §. angezeigt, woher dieses komme, und wie das dritte und die folgende Glieder für die Quadratwurzel müssen gefunden werden.

§. 55.

Bey allen diesen Reihen werden die Binomialfactoren, durch deren Multiplication die Glieder derselben entstehen, einander mehrentheils ungleich, und zuweilen, wie in dem Beyspiele des §. 53. unähnlich. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, bey welcher diese Ungleichheit wegbliebe, und die Reihe eben dadurch einförmiger würde. Diese werde ich so gleich hersetzen, und hier nur noch anmerken, daß, wenn bey der erst angeführten die fürge-

gebene

gebene Reihe endlich ist, auch diejenige endlich werde, in welche jene nach dieser Methode verwandelt wird.

§. 56.

Es sey nun die Reihe

$$y = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

bey welcher wir setzen, daß die Coefficienten a, b, c &c. immer langsamer abnehmen. Man setze

$$1 + x^n = z$$

so ist

$$\begin{array}{llll} yz = x^m & - a x^{m+n} & + b x^{m+2n} & - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.} \\ & + 1 \ldots & - a \ldots & + b \ldots \end{array}$$

demnach

$$yz - x^m = (1-a) x^{m+n} - (a-b) x^{m+2n} + (b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Da diese Reihe der fürgegebenen ähnlich ist, so leidet sie eben die Verwandlung, und damit ist

$$yz^2 - x^m z - (1-a) x^{m+n} = (1-2a+b) x^{m+2n} - (a-2b+c) x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Auf eben die Art wiederum

$$yz^3 - x^m z^2 - (1-a) x^{m+n} z - (1-2a+b) x^{m+2n} = (1-3a+3b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Fährt man auf diese Art immer fort, so erhält man nach λ Wiederholungen

yz^λ

$$yz^\lambda - x^m z^{\lambda-1} - (1-a) x^{m+n} z^{\lambda-2} - (1-2a+b) x^{m+2n} z^{\lambda-3} + \&c.$$

$$= \left(1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.b + \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}c - \&c.\right) x^{m+\lambda n} - \&c.$$

Und demnach, wenn man alles durch z^λ dividirt

$$y - \frac{x^m}{z} - \frac{(1-a)x^{m+n}}{zz} - \frac{(1-2a+b)x^{m+2n}}{z^3} + \&c. \ldots$$

$$= \left(1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.b + \&c.\right) \frac{x^{m+\lambda n}}{z^\lambda} - \&c.$$

Ist nun x positiv, so ist

$$z = (1 + x^n) > x^n$$

demnach

$$z^\lambda > x^{n\lambda}$$

Daher wird der Bruch

$$\frac{x^m . x^{n\lambda}}{z^\lambda}$$

in geometrischer Progression kleiner, je grösser λ wird, und folglich = 0, wenn man λ = ∞ setzt. Wir setzen dieses und haben demnach

$$0 = y - x^m : z - (1-a) x^{m+n} : z^2 - (1-2a+b) x^{m+2n} : z^3 - (1-3a+3b-c) x^{m+3n} : z^4 - \&c.$$

eine unendliche Reihe, welche sich, wenn man für z dessen Werth $1+x^n$ setzt, in

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(1+(1-a)\frac{x^n}{1+x^n}+(1-2a+b).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+(1-3a+3b-c).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+ \text{etc.}\right)$$

verwandelt. Und dieses ist die Reihe, welche wir suchen wolten. Man sieht zugleich, daß sie sehr einförmig ist, und daß die Coefficienten

$$\begin{array}{l} 1-a \\ 1-2a+b \\ 1-3a+3b-c \\ 1-4a+6b-4c+d \\ \text{etc.} \end{array}$$

die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen der Coefficienten a, b, c, d &c. der fürgegebenen Reihe sind.

§. 57.

Um ein sehr allgemeines Beyspiel hievon zu geben, so sey die Reihe

$$y = \frac{c}{a}x^m - \frac{c+d}{a+b}x^{m+n} + \frac{c+2d}{a+2b}x^{m+2n} - \frac{c+3d}{a+3b}x^{n+3m} - \&c.$$

wobey sowohl die Zähler als Nenner in arithmetischer Progression fortgehen. Vergleicht man diese Reihe mit der Reihe (§. 56.)

$$y = ax^m - bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

und

und nimmt die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen, so erhält man die Reihe

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{c}{a} + \frac{cb-ad}{a(a+b)}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(cb-ad).2b}{a.(a+b).(a+2b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(cb-ad).2b.3b}{a.(a+b).(a+2b).(a+3b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

welche nach einem sehr einfachen Gesetze fortgeht. Hier sind nun einige besondere Fälle.

§. 58.

Es sey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{2a}x^{m+n} + \frac{1}{3a}x^{m+2n} - \&c.$$

so ist $c=1$, $d=0$, $a=b$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1}{3a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{1}{4a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \&c.\right)$$

Setzt man hier $a=m=n=1$, so ist

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{etc.} = \log.(1+x)$$

und

$$y = \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c. = \log.(1+x).$$

§. 59.

Es sey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+b}x^{m+n} + \frac{1}{a+2b}x^{m+2n} - \text{etc.}$$

so ist $c = 1$, $d = 0$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{b.\,2b}{a(a+b).(a+2b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \text{etc.}\right)$$

Setzt man hier $n = 2$, $b = 2$, so ist

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+2}x^{m+2} + \frac{1}{a+4}x^{m+4} - \text{etc.}$$

und

$$y = \frac{x^m}{1+xx}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a(a+2)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right) + \frac{2.\,4}{a(a+2).(a+4)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^2 + \text{etc.}\right)$$

Von diesen beyden Reihen ist erstere ein Stück der Leibnitzischen, sobald man für a und m eine gleiche ungerade Zahl setzt. Man mache z. E. $a = m = 21$, und $x = 1$, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{21}x^{21} - \tfrac{1}{23}x^{23} + \tfrac{1}{25}x^{25} - \tfrac{1}{27}x^{27} + \text{etc.}$$

und

$$y = \tfrac{1}{42}\left(1 + \tfrac{1}{23} + \frac{1.\,2}{23.\,25} + \frac{1.\,2.\,3}{23.\,25.\,27} + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{23.\,25.\,27.\,29} + \text{etc.}\right)$$

IV.

IV.

Algebraische Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

§. 1.

In den Anfangsgründen der Trigonometrie wird die Verfertigung der trigonometrischen Tafeln gewöhnlich so angegeben, wie sie sich aus der Elementargeometrie begreiflich machen läßt, und wie diese Tafeln in der That anfangs verfertigt worden. Man kann nemlich vermittelst des Circuls und Lineales den Circul in 2, 3, 4, 5 gleiche Theile theilen, und jeden Bogen, so vielmal man will, halbiren. Daraus läßt sich sodann herleiten, wie sich der Circul von 3 zu 3 Graden, oder von 45 zu 45 Min. oder von 675 zu 675 Secunden eintheilen, und die Sinus, Tangenten und Secanten von allen diesen Bögen berechnen lassen. Diese Berechnungsart ist ungemein weitläuftig. Man hat daher seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung auf Mittel gedacht, sie abzukürzen, und jede Sinus, Tangenten und Secanten für sich zu finden, ohne daß sie erst aus einander hergeleitet werden müsten. Dazu müsten nun allerdings unendliche Reihen ge-

 braucht

braucht werden, dafern man nicht bey den imaginairen Formeln, die Herr Joh. Bernoulli zuerst gefunden, stehen bleiben wollte, als welche, wenn man sie nicht in unendliche Reihen verwandelt, fürnemlich nur zu Erfindung von Lehrsätzen dienen.

§. 2.

Will man aber für die Sinus und Tangenten algebraische Formeln haben, die weder imaginair sind, noch aus unendlich vielen Gliedern bestehen, so bleibt man eben so zurücke, wie die ersten Berechner der trigonometrischen Tafeln, weil man sie ebenfalls nur von 3 zu 3 Graden berechnen kann, und die dazwischen fallenden, durch fortgesetztes Halbiren, finden muß. Da mir solche Formeln noch nicht vorgekommen, so unterzog ich mich der Arbeit sie zu finden, um ausführlich zu sehen, auf welche Art die Sinus von 3 zu 3 Graden mehr oder minder irrational sind. Folgende Tabelle stellt sie mit einem Anblicke vor Augen.

Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

$$\sin. 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

sin.

$$\sin. 12^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{15} + \tfrac{1}{8}\sqrt{3}$$

$$\sin. 15^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{8}} - \sqrt{\tfrac{1}{8}}$$

$$\sin. 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}$$

$$\sin. 21^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin. 24^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{15} + \tfrac{1}{8}\sqrt{3} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$

$$\sin. 27^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 30^\circ = \tfrac{1}{2}$$

$$\sin. 33^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\sin. 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$

$$\sin. 39^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 42^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} + \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 48^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{15} - \tfrac{1}{8}\sqrt{3}$$

$$\sin. 51^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 54^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}$$

$$\sin. 57^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\sin. 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin. 63^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$\sin. 66^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin. 69^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

$\sin. 75^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\sin. 78^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}$

$\sin. 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 84^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

$\sin. 87^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 90^\circ = 1.$

§. 3.

Bey der Berechnung dieser Formeln legte ich die Sinus von 45, 30, 18 Graden zum Grunde, weil von diesen, jeder für sich, aus der Elementargeometrie gefunden werden muß. Die übrigen Formeln fanden sich sodann aus den bekannten zween Lehrsätzen

$\sin. (x + y) = \sin. x. \cos. y + \cos. x. \sin. y$

$\sin. (x - y) = \sin. x. \cos. y - \cos. x. \sin. y.$

Sie müßten aber nach einer gewissen Ordnung gefunden werden, damit man aller Reductionen überhoben seyn könne. Die Ordnung, so ich dabey beobachtet, ist folgende:

I°. $\sin. 60^\circ = \cos. 30 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

II°. $\sin. 75^\circ = \sin. (45 + 30)$

$\sin. 15^\circ = \sin. (45 - 30)$

III°. $\sin. 72^\circ = \cos. 18^\circ$

IV°.

IV°. $\sin. 54^\circ = \sin. (72 - 18)$

$\sin. 36^\circ = \cos. 54^\circ = \sin. (2.18)$

V°. $\sin. 12^\circ = \sin. (30 - 18)$

$\sin. 48^\circ = \sin. (30 + 18)$

$\sin. 24^\circ = \sin. (54 - 30)$

$\sin. 84^\circ = \sin. (54 + 30)$

$\sin. 6^\circ = \sin. (36 - 30)$

$\sin. 66^\circ = \sin. (36 + 30)$

$\sin. 42^\circ = \sin. (72 - 30)$

$\sin. 78^\circ = \sin. 102^\circ = \sin. (72 + 30)$

VI°. $\sin. 81^\circ = \sin. 99^\circ = \sin. (54 + 45)$

$\sin. 9^\circ = \sin. (54 - 45)$

$\sin. 63^\circ = \sin. 117^\circ = \sin. (72 + 45)$
$\quad = \sin. (45 + 18)$

$\sin. 27^\circ = \sin. (72 - 45) = \sin. (45 - 18)$

VII°. $\sin. 3^\circ = \sin. (48 - 45)$

$\sin. 87^\circ = \sin. 93^\circ = \sin. (48 + 45)$

$\sin. 21^\circ = \sin. (45 - 24)$

$\sin. 69^\circ = \sin. (45 + 24)$

$\sin. 33^\circ = \sin. (45 - 12)$

$\sin. 57^\circ = \sin. (45 + 12)$

$\sin. 39^\circ = \sin. (45 - 6)$

$\sin. 51^\circ = \sin. (45 + 6).$

§. 4.

In eben dieser Ordnung werden auch die Formeln selbst zusammengesetzter. Vergleicht man sie miteinander, in Absicht auf die Irrationalität, so findet sich, daß sie aus 15 verschiedenen Arten von Wurzelgrössen zusammengesetzt sind, und daß sie sich, wenn man einmal

 diese

diese gefunden, durch bloßes Addiren und Subtrahiren berechnen lassen. Die Wurzelgrössen sind

	$\sqrt{(1:2)}$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{(3:2)}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{(5:2)}$	$\sqrt{(15+3\sqrt{5})}$	$\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{(15:2)}$	$\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$	$\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

§. 5.

Weiter geht nun die Elementargeometrie nicht, als daß sie noch Mittel giebt, durch fortgesetztes Halbiren, die Sinus für kleinere Bögen zu finden. Die einfachste Art, dieses durch Rechnung zu verrichten, geben folgende beyden Formeln an

$$\sin.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$

welche durch die Auflösung der Gleichung

$$\sin.y = 2\sin.\tfrac{1}{2}y.\cos.\tfrac{1}{2}y$$

leicht gefunden werden. Werden diese beyde Formeln addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\cos.\tfrac{1}{2}y + \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1+\sin.y)}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}y + \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1-\sin.y)}$$

Multiplicirt man diese mit

$$\sin.45^\circ = \cos.45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

so ist

$$\sin.45^\circ.\cos.\tfrac{1}{2}y + \cos.45^\circ.\sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1+\sin y}{2}\right)}$$

$$\sin.45^\circ.\cos.\tfrac{1}{2}y - \cos.45^\circ.\sin\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.y}{2}\right)}$$

dem-

demnach $\sin.(45^\circ+\tfrac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin.y}{2}\right)}$

$$\sin.(45^\circ-\tfrac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.y}{2}\right)}$$

§. 6.

Aus den vorhin angeführten Formeln lassen sich noch einige speciale trigonometrische Lehrsätze herleiten, wenn man sie unter einander vergleicht. So z. E. ist

$$\sin.75^\circ - \sin.15^\circ = 2\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin.45^\circ$$
$$\sin.75^\circ.\sin.15^\circ = \tfrac{1}{4}$$
$$\text{tang}.15^\circ = 2-\sqrt{3} = 2-\text{tang}.60^\circ$$
$$\text{tang}.75^\circ = 2+\sqrt{3} = 2+\text{tang}.60^\circ$$
$$\text{tang}.15^\circ + \text{tang}.75^\circ = 4.$$

Eben so auch

$$\sin.54^\circ - \sin.18^\circ = \tfrac{1}{2} = \sin.30^\circ$$
$$\sin.54^\circ.\sin.18^\circ = \tfrac{1}{4}$$
$$\text{tang}.18^\circ.\text{tang}.54^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{5}}$$
$$\sin.36^\circ.\sin.72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$$
$$\text{tang}.18^\circ + \sec.18^\circ = \text{tang}.54^\circ$$
$$\sin.18^\circ + \sin.54^\circ = \tfrac{3}{4} = \sin.60^\circ$$
$$\cos.18^\circ + \cos.54^\circ = \tfrac{5}{4}$$

ingleichen

$$\sec.30^\circ = \tfrac{1}{2}(\text{tang}.30^\circ + \text{tang}.60^\circ)$$
$$= \tfrac{4}{3}\sin.60^\circ.$$

V.

V.
Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen.

§. 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden, die den meisten Antheil daran nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben, und solte man die, so in den folgenden Zeiten sich damit beschäftigen, nach denen beurtheilen, die sich bisher damit beschäftigt haben, so werden es gröstentheils solche seyn, die von der Geometrie wenig verstehen, und ihre Kräfte zu schätzen nicht im Stande sind. Was aber den meisten an Erkenntniß und Verstand abgeht, und wo sie mit richtigen und zusammenhängenden Schlüssen nicht ausreichen, das ersetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder sehr fein, noch sehr versteckt sind. Es hat auch Fälle gegeben, wo solche Leute feste geglaubt

glaubt haben, man versage ihren vermeynten Beweisen den Beyfall bloß aus Neid und Mißgunst. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England nnd Holland eben so grosse Preiße und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden, als auf die Erfindung der geographischen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür stehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, daß die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer solchen Verbindung stehe, daß, wer letztere gefunden, zugleich auch erstere gefunden habe. So viel ist gewiß, daß man damals Verhältnisse zwischen Wahrheiten suchte und glaubte, die noch vielweniger zusammen paßten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preiß auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden seyn, so glaube ich, daß das Parlement in England ein sehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preiße für die Länge zur See schon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen kund machen liesse, daß man sich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preiß Rechnung zu machen habe. In der That hat man sich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weiß, wie sehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig ist.

§. 2.

§. 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens gesucht worden, ist entweder an sich unmöglich, oder sie ist einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyspiel mag dieses erläutern. Es ist nicht zu zweiffeln, daß die alten Phoenicischen, und nach ihnen die Griechischen und Römischen Schiffer ein Mittel gewünscht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben so den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Gestirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen sollen, daß sie dieses Mittel in dem Magnetsteine zu suchen hätten? Es ist unstreitig, daß diese Entdeckung auf einen schlechthin unvorgesehenen Zusammenlauf mehrerer Umstände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wissen, nicht veranstalten konnte, und der folglich sich von selbst darbieten muste. Auf eine ähnliche Art ist es zu vermuthen, daß, wenn je die Quadratur des Circuls möglich seyn solte, sie vielleicht einem Meßkünstler aufstößt, der an nichts wenigers als an die Erfindung derselben gedenkt. Es ist aber auch möglich, daß man auf eine eben so zufällige Weise auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyspiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenschaft. Denn einmal sind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten sie sich beynahe wie das Quadrat des

des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, daß der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleichräumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 ist. Sodann, wenn man 961 vierfach nimt, so erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird sich zum Umkreise beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur muß man dieses beynahe nicht sehr strenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, so kömmt 3,138... Und da sieht man leicht, daß diese Verhältniß schon in der 3ten Decimalstelle von 3,1415926... abweicht, und daher lange nicht so genau ist, als die Archimedischen 22:7, welche die Reihe 3,1428571... giebt, die nur um 0,0012645... zu groß, und damit fast dreymal genauer ist.

§. 3.

Indessen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewissen Werth, daß es Quadratzahlen sind. In diesem Jahrhundert sind, so viel ich weiß, ihrer drey darauf verfallen. Dieser Umstand scheint mir der merkwürdigste. Denn da es noch mehrere solcher Quadratzahlen giebt, so solte man ehender denken, daß jeder von diesen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen seyn. Der erste war Herr von Leistner, Kayserl. Rittmeister. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und diese wurden von einer Kayserl. Hofcommission als unrichtig erkannt, wowider aber

aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius &c. protestirt wurde. Der andere war Herr Merkel, Prediger zu Rakensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erst Anno 1751 heraus. Er sagt aber, daß er lange vor dem Herrn v. Leistner seine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weise gefunden habe, er sey aber erst durch den Nodum gordium bewogen worden, sie auf alle Proben zu setzen; was ihn aber fürnemlich aufgebracht habe, sie durch den Druck bekannt zu machen, sey ein Articul in der Utrechter Zeitung gewesen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf gesetzte Preiß angefordert wurde; diese Nachricht habe ihm um so geschwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter seine Zahlen einen Franzosen, der wirklich nachher in die Niederlande verreisete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und so habe er starke Gründe zu vermuthen, dieser Geometra möchte mit seinem Kalbe gepflügt haben ꝛc. Was damit nun weiter vorgegangen, ist mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkelsche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Bischoff zu Alten-Stettin mit Anmerkungen und noch mehrerern Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen sie im Anfange des 1766sten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorschein, mit der solennen

Ankündigung, daß man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu suchen nöthig habe, weil sie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden worden ꝛc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin sich an die Sache machen werden, dieses ganz f ste glaubten, weil sie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verliehren, die man als sehr vergebens angewandt ansehen kann, weil die meisten von denselben kaum eine leichte geometrische Aufgabe zu erfinden und aufzulösen im Stande sind. Es ist auch kaum zu zweifeln, daß nicht auch künftig noch die Merkelsche und Leistnersche Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorschein kommen solten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit ist, daß 3844 durch 1225 getheilt, die Ludolphische Zahlen geben solte. Herr Prof. Bischoff nimmt auch diese Ludolphische, und sogar die über doppelt weiter reichende Sherwinsche Zahlen vor, er sieht sie aber nicht als Probiersteine an, sondern sagt, daß sie zwar gar sehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, denmach müste man auf andere Proben bedacht seyn. Von solchen Proben führt Herr Bischoff 8 an, und macht auf diese Art die Sache scheinbar. Es ist unstreitig, daß wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalstellen reichende Ludolphische Zahlen genau geben würde, man damit

damit eines Theils sehr wohl zufrieden seyn könnte, andern Theils aber sehen müste, ob man durch diese Division auch die bis auf 72 Decimalstellen reichende Sherwinsche Zahlen, und sodann die bis auf 100 Decimalstellen reichende Machinsche, oder endlich die bis auf 127 Decimalstellen reichende Lamysche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte sodann um so mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden seyn. Allein nimmt man bemeldte Division vor, so fängt der Quotient 3, 138.... schon in der zweyten Decimalstelle an, von den Ludolphischen Zahlen abzuweichen. Und überdies sind alle die 8 Proben von der Art, daß iede beliebige zwo Quadratzahlen dieselbe aushalten. Ich werde mich aber nicht verweilen, dieses hier zu zeigen, sondern vielmehr angeben, wie sich nach einer allgemeinen Regel solche Quadratzahlen finden lassen, welche die Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls desto genauer angeben, je grösser sie sind. Dieses mag unter andern auch dahin dienen, daß man künftig nicht nöthig habe, erst zufälliger Weise auf solche Quadratzahlen zu verfallen, und sie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§. 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, so, daß wenn a der Diameter des Circuls,

dem-

demnach aa dessen Quadrat ist, sodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite desselben vorstelle. Auf diese Art wird sich aa zu 4bb wie der Diameter zum Umkreise, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, 6 + ... = 1 : π verhalten.

Demnach ist $aa : 4bb = 1 : \pi$

und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es ist aber $\sqrt{\pi} = 1,77245385075 \ldots$

Und hieraus findet sich

$$a:b = \frac{2,00000000000}{1,77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \text{rc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt der Ordnung nach

b:a =	7:8 + ...	und bb:aa =	49:64 +
=	8:9 − ...	=	64:81 −
=	31:35 + ...	=	961:1225 +
=	39:44 − ...	=	1521:1936 −
=	109:123 + ...	=	11881:15129 +
=	148:167 − ...	=	21904:27889 −
=	3848:4342 + ... rc.	=	14807104:18852964 + rc.

Diese

Diese Brüche sind nun der Ordnung nach genauer. Man sieht auch hieraus, daß die Herren von Leistner, Merkel, Bischoff ꝛc. nur zufälliger Weise auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen sind. Denn die Rechnung mit 49:64 oder 64:81 wäre immer viel leichter und kürzer gewesen, und mit 1521:1936, oder 11881: 15129 ꝛc. würde sie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer gewesen seyn.

§. 5.

Es ist aber überhaupt mehr anzurathen, schlechthin nur die ersten von diesen Verhältnissen nemlich b:a zu gebrauchen. Denn für bb:aa hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu seyn, viel kleiner und viel genauer sind, indem man nach eben dieser Art zu verfahren

$$
\begin{aligned}
bb:aa = \pi:4 &= 11 : 14 \\
&= 172:219 \\
&= 355:452 \text{ ꝛc.}
\end{aligned}
$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ ꝛc. die Seite eines Quadrates aus, welches so groß als die Fläche eines Circuls ist, dessen Diameter $= 1$ angenommen wird. Und hinwiederum stellen eben diese Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$,

$\frac{44}{39}$, $\frac{123}{109}$, $\frac{167}{148}$, $\frac{4342}{3848}$ ꝛc. den Diameter eines Circuls vor, dessen Inhalt $= 1$ ist. Und in dieser Absicht lassen sie sich bey Ausmessung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindrischen Visirstäbe gebrauchen. Besonders ist hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derselbe unter den kleinern der genaueste ist, und erst in der siebenden Decimalstelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, so findet sich der Diameter des Circuls, dessen Inhalt $= 1$ ist, vermittelst der Ludolphischen Zahlen $= 1,1283790\ldots$

Es ist aber $\frac{167}{148} = 1,1283784\ldots$

demnach der Unterschied $= 0,0000006\ldots$

Es geschieht selten, daß man diesen Diameter in practischen Fällen genauer zu wissen verlangt.

§. 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich ist, auf solche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Cirkels, oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; so wird es eben nicht undienlich seyn, solchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und solche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu bestimmen, zumal da sie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der

Caliberstäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es sey demnach der Diameter der Kugel $= a$, die Seite des gleichräumigten Würfels $= b$, die Ludolphische Zahlen $3,1415926\ldots = \pi$, so ist nach der bekannten Archimedischen Regel

$$b^3 : a^3 = \pi : 6$$

demnach $$b : a = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Nun ist

$$\pi = 3,141592,653589,793238,462\ldots$$
$$\tfrac{1}{6}\pi = 0,523598,775598,298873,077\ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b:a = 0,805995,977008,234820\ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöst

$$b:a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+ \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

giebt. Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} b:a &= 4:5 + \\ &= 25:31 - \\ &= 54:67 + \\ &= 457:567 - \\ &= 2796:3469 + \\ &= 17233:21381 - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Dem-

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ ist, so wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{25}{31}$, $\frac{54}{67}$, $\frac{457}{567}$, $\frac{2796}{3469}$, $\frac{17233}{21381}$ ꝛc. desto genauer ausgedrückt, je grösser derselbe ist. Cubirt man diese Brüche, so geben sie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, so stellen eben diese Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}$, $\frac{25}{31}$, $\frac{67}{54}$, $\frac{567}{457}$, $\frac{3469}{2796}$, $\frac{21381}{17233}$ ꝛc. den Diameter der Kugel vor. Man kann sich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derselbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben so genau giebt, als man denselben vermittelst der logarithmischen Tabellen findet.

§. 7.

Ich habe bey dieser Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalstelle geliefert. Da es nun eine verdrüßige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man sie nach den gemeinen Regeln bis so weit suchen wolte, so wird es nicht undienlich seyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich diese Wurzel vermittelst einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich versichert habe, daß sie bis auf die 18te Decimalstelle richtig ist.

 §. 8.

§. 8.

Nach der Newtonschen Binnomialformel ist überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2}. a^{n-2} b^2 + \&c.$$

Man multiplicire nun diese Reihe mit $1 + zb : a$, und in dem Producte

$$x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \text{ꝛc.}$$

$$+ z a^{n-1} b + n z. a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}. z a^{n-3} b^3 + \text{ꝛc.}$$

setze man, um z zu bestimmen, das dritte Glied

$$n.\frac{n-1}{2}. a^{n-2} b^2 + n.z.a^{n-2} b^2 = 0$$

so ist

$$z = -\frac{n-1}{2}$$

Wird nun dieser Werth von z in dem Producte gesetzt, so erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}.\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1} b + * - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n+1}{6} a^{n-3} b^3 - \&c.$$

und hieraus

$$x =$$

$$x = (a+b)^n = \left(\frac{2a + (n+1)b}{2a - (n-1)b}\right) a^n + * - \frac{n.(n-1).(n+1) a^{n-2} b^3}{6(2a - (n-1)b)} - \&c.$$

Von dieser Reihe wird das erste Glied zur Bestimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem ersten ausreicht.

§. 8.

Nun ist für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man diesen Werth, so erhält man nach den gehörigen Reductionen die Formel

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+1b}. \sqrt[3]{a} + * + \frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27aab} + \&c.$$

Diese habe ich nun, um aus

$a + b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermassen angewandt. Erstlich fand ich, vermittelst der Logarithmen die sechs ersten Decimalstellen dieser Wurzel. Diese sind

$$0{,}805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da

$$805995 = 806000 - 5$$

ist, so liesse sich hievon der Cubus leicht finden. Ich setzte demnach denselben

$$0{,}523596871520449875 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0{,}00000190407784899807710 7\ldots$$

Da nun, wenn man das erste Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieses die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a} : x$$

oder $(a+\frac{1}{3}b):(a+\frac{2}{3}b) = \sqrt[3]{a} : x$,

so durfte ich nur die Werthe von a und b setzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Daß nun aber dieser Werth bis auf die 18te Decimalstelle richtig seye, fand ich vermittelst des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3 \cdot \sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27a^2b}$$

durch einen leichten Ueberschlag. Denn da b um 275000 mal kleiner ist als a, so konnte ich dieses Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

setzen. Nun ist

$$3 \log. b : a = 0{,}6820508 - 17$$
$$\log. \tfrac{2}{81} = 1{,}6074550$$

demnach $\log. \frac{2b^3}{81a^3} = 0{,}9145458 - 19.$

Da nun hier die Characteristica $= -19$, und $a < 1$ ist, so ist klar, daß

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorstellt, der erst auf der 19ten Decimalstelle anfängt. Und so ist die durch

$$x = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau.

§. 9.

Ob die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, ist, meines Wissens, noch nicht erörtert. Sturm hat zwar diese Frage zu verneinen gesucht: allein sein Beweis ist mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational ist, ungeachtet alle Glieder irrational sind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, so kann es immer noch Leute geben, die mit Aufsuchung solcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüsse dergleichen auf die Bahn bringen. Nun ist zwar bey jedem, vermittelst der Ludolphischen Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworffen wird, so kann noch immer die Lust bleiben, andere zu suchen. Nun läßt sich diese Lust so geringe

geringe machen, daß man das Aufsuchen solcher Brüche leicht wird bleiben lassen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken liesse, so kann man aus den oben (§. 4.) angeführten **Lamyschen** Zahlen, oder auch aus den **Ludolphschen** Zahlen erweisen, daß es ein sehr grosser Bruch seyn müsse. Diese Zahlen lassen sich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach grösser und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorsichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** §. 17. angezeigt und durch Beyspiele erläutert. Nach dieser Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33102	:	103993
33215	:	104348
66317	:	208341
99532	:	312689
265381	:	833719
364913	:	1146408
1360120	:	4272943
1725033	:	5419351
25510582	:	80143857

52746197:

52746197	:	165707065
78256779	:	245850922
131002976	:	411557987
340262731	:	1068966896
811528438	:	2549491779
1963319607	:	6167950454
4738167652	:	14885392687
6701487259	:	21053343141
567663097408	:	1783366216531
1142027682075	:	3587785776203
1709690779483	:	5371151992734
2851718461558	:	8958937768937
107223273857129	:	336851849443403
324521540032945	:	1019514486099146 rc.

Von diesen Verhältnissen ist nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwischen dieselben fällt keine rationale Verhältniß, die genauer wäre, als die nächst grössere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen genau sollte ausgedrückt werden können, so müsten diese Zahlen nothwendig grösser als die letzten

324521540032945 : 1019514486099146

von den hier angegebenen seyn. Diese zwo Zahlen geben die **Ludolphische** bis auf die 25te Decimalstelle. Wenn sie aber auch ganz genau wären, so sieht man leicht, daß es weitläuftig und beschwerlich wäre damit zu rechnen. Uebrigens entstehen alle diese Verhältnisse aus der *Fractio continua*

1

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+a}}}}}}}}}}}}}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+\text{etc.}}}}}}}}}}}}}$

ist.

ist. Weiter habe ich die Berechnung von dieser Fractio continua aus den **Ludolphischen** Zahlen nicht verfolgt. Und so werde ich auch nicht sagen, ob sie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäre dieses, so liesse sich die Verhältniß des Diameters zum Umkreise, durch ganze, wiewohl ungeheuer grosse Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewissen Gesetze ins Unendliche fortgeht, und die Hofnung, die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen zu bestimmen, ganz benimmt.

§. 10.

Es giebt in der Mathematik noch andere Grössen, von denen es sich eben so viel der Mühe lohnte, zu suchen, ob sie durch rationale Brüche, oder auf eine geschmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geschieht. Dahin kann besonders die Zahl 2,718281,828459,045235,36028... gerechnet werden, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist. Diese Zahl ist in Absicht auf die Logarithmen eben das, was die **Ludolphischen** Zahlen in Absicht auf den Circul sind, und daher in Absicht auf trigonometrische und andere Rechnungen von gleicher **Erheblichkeit. Fragt** man demnach, warum denn

denn nur die **Ludolphische** Zahlen so viel Wesens machen? so wird diese Frage theils nur aus der Geschichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, daß die Begriffe **Circul**, **Vierecke**, **Grösse**, **gleich** jedermann bekannt sind, welches sich von dem Begrif **hyperbolische Logarithmen** nicht sagen läßt, weil dieser Begrif erst durch den Infinitesimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieses Calculs nicht wohl deulich gemacht werden kann. Wäre den meisten unter denen, so die Quadratur des Circuls suchen, nicht dieser Riegel geschoben, so würden, allem Ansehen nach, eben so viel vergebliche Bemühungen und fehlgeschlagene Versuche, in Ansehung der Zahl 2,718281, 828459, 045235, 36028 ... zum Vorschein kommen, als in Ansehung der **Ludolphischen** Zahlen zum Vorschein gekommen sind. Es läßt sich aber auch diese Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn setzt man dieselbe Kürze halber $= e$, so ist

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{rc.}}}}}}}}$$

oder

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \text{rc.}}}}}}$$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \text{rc.}}}}}}}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \text{rc.}}}}}$$

Da diese Brüche immer fortgehen, so läßt sich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch ist. Ich habe übrigens diese Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 19. seqq.) angegeben habe.

habe. Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn Eulers Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+ \text{rc.}}}}}}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyspieles vorkömmt.

§. 11.

Auf eben diese Veranlassung gienge ich weiter, und fande in Absicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{1:v-\cfrac{1}{3:v-\cfrac{1}{5:v-\cfrac{1}{7:v-\cfrac{1}{9:v- \text{rc.}}}}}}$$

Aus diesem immer fortgehenden Bruche lassen sich, in Absicht auf die unbestimmte Quadratur des Circuls, verschiedene Folgen ziehen. Man setze n eine ganze Zahl, und mache $v = 1:n$, so ist

tang.

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{n-\cfrac{1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n-\cfrac{1}{9n-\cfrac{1}{11n- \text{rc.}}}}}}}$$

Da dieser Bruch immer fortgeht, so folgt daraus, daß, so oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmessers ist, die Tangente desselben nothwendig irrational sey. Denn wäre die Tangente rational, so könnte dieser Bruch nicht in einem fortgehen, sondern er müßte irgend aufhören. Um dieses mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyspiele $v = 1$ setzen. Da nun auch $n = 1$ wird, so ist

$$\text{tang. arc. } 1 = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{9- \text{rc.}}}}}}$$

demnach zufolge der vorhin (§. 9.) angeführten Abhandlung

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
− 3	+ 1	+ 1
+ 5	− 3	− 2
− 7	− 14	− 9
+ 9	+ 95	+ 61
− 11	+ 841	+ 540
+ 13 rc.	− 9156 rc.	+ 5879 rc.

 Und

Und so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2},\ \frac{14}{9},\ \frac{95}{61},\ \frac{841}{540},\ \frac{9156}{5879}\ \text{rc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergestalt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, sondern dergestalt fortgeht, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden, als jede fürgegebene Zahl, so läßt sich die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmessers sind.

§. 12.

Werden die erstgefundene Brüche von einander abgezogen, so findet sichs dadurch, wie geschwinde sie dem wahren Werthe näher kommen. Denn so ist

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

rc.

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879} + \frac{1}{5879.76887} + \text{rc.}$$

ausgedrückt, welche stärker convergirt als jede geometrische Reihe, und man weiß, daß die Summe derselben irrational ist.

§. 13.

Daß aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, sondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben, irrational seyn, erhellet auf eben diese Art. Es sey z. E. $v = \frac{2}{3}$, so ist die Tangente dieses Bogens

$$= \cfrac{1}{3:2 - \cfrac{1}{9:2 - \cfrac{1}{15:2 - \cfrac{1}{21:2 - \text{rc.}}}}}$$

demnach	1	0		
+ 3:2	0	1	=	0 : 1
− 9:2	+ 1	+ 3 : 2	=	2 : 3
+ 15:2	− 9:2	− 23 : 4	=	18 : 23
− 21:2	− 131 : 4	− 333 : 8	=	262 : 333
+ 27:2	+ 2715 : 8	+ 6901 : 16	=	5430 : 6901
rc.	rc.	rc.		

Und so wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{18}{23}$, $\frac{262}{333}$, $\frac{5430}{6901}$ rc. und zwar durch jeden folgenden dergestallt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgend aufhört, sondern so anwächst, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden als jede fürgegebene Zahl, so folgt, daß die Tangente des Bogens $v = \frac{3}{2}$ irrational sey. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ sind, oder zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Zieht man die erstgefundene Brüche von einander ab, so erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} + \text{rc.}$$

welche ebenfalls stärker als jede geometrische Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§. 14.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational ist, so ist hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man setze, der Bogen wäre rational, so würde der Voraussetzung zuwider die Tangente, vermöge des erst erwiesenen, irrational seyn.

§. 15.

Wir haben in den trigonometrischen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr. welche den Halbmesser gleich, und demnach = 1 ist. Damit ist also der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen von 90, 180, 360 Gr. irrational, oder diese Bögen haben zu dem Halbmesser des Circuls kein rationales Verhältniß.

§. 16.

Aus dem bisher gesagten erhellet demnach so viel, daß kein Bogen nebst seiner Tangente zugleich ein rationales Verhältniß zum Halbmesser haben könne. Es ist aber auf unzählige Arten möglich, daß ein Bogen zu seiner Tangente ein rationales Verhältniß habe. Allein es läßt sich auch beweisen, daß in allen diesen Fällen, sowohl der Bogen als die Tangente desselben, mit dem Halbmesser incommensurabel sind. Denn erstlich können, vermöge des bereits erwiesenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Man setze demnach, es sey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im ersten Fall müste die Tangente sowohl mit dem Halbmesser als mit dem Bogen commensurabel seyn. Und so wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmesser commensurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen

Verhältnisse ebenfalls rational ist. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmesser commensurabel, und so würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Da nun vermöge des vorhin erwiesenen, Halbmesser, Bogen und Tangente nicht zugleich commensurabel sind, so werden die beyden angeführten Fälle umgestossen; demnach wenn Bogen und Tangente unter sich ein rationales Verhältniß haben, so sind beyde mit dem Halbmesser in- incommensurabel.

§. 17.

Noch werde ich kurz zween Umstände berühren, die in Absicht auf die Quadratur des Circuls etwas scheinbares haben. Der erste ist folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beschreibt, so, daß jede Seite den Circul berühre, so verhält sich der Umkreis des Vielecks zu seinem Inhalte, wie sich der Umkreis des Circuls zu seinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er sehr leicht ist. Der andere Umstand ist ein Phaenomenon, welches sich folgendermaßen eräugnet: Wenn man 1 durch 0,7853981634... als den vierten Theil der Ludolphischen Zahlen dividirt, so geht es 1 mal, und es bleibt 0,2146018366.... Dividirt man ferners diesen

diesen Ueberrest in die 0,7853981634... durch die man vorhin getheilt hatte, so geht es 3 mal und es bleibt 0,1415926536.... Setzt man diesem Ueberrest die Zahl 3 vor, so erhält man 3,1415926536÷.. welches gerade die Ludolphische Zahlen sind. Hiezu sage ich weiter nichts, als daß es ein blosses Phaenomenon ist, woraus sich auf die Quadratur des Circuls schlechthin nicht schliessen läßt. Es ist auch nicht schwer die Ursache davon zu finden.

VI.
Einige Anmerkungen von Ausmessung der Winkel und Linien auf dem Papier.

§. 1.

Tab. I. Unter denen Instrumenten, so man zur Zeichnung der Figuren auf dem Papier gebraucht, findet sich gewöhnlich ein Transporteur zu Abnehmung und Auftragung der Winkel, ein Winkelhacken zur Zeichnung von senkrechten Linien, und ein Triangel oder zwey zusammengerichtete Lineale zur Zeichnung der Parallellinien. Alle diese Instrumente lassen sich in eines zusammenziehen, welches ihre Vortheile vereinigt, und in Absicht auf die Zeichnung jeder Winkel noch bequemer ist. Da ich es nirgends schon beschrieben gefunden, so werde ich die Verfertigung und den Gebrauch desselben, da beydes sehr leicht ist, mit wenigen Worten hier anzeigen.

§. 2.

Fig. I. Aus einer hölzernen, helfenbeinernen, hornenen oder metallenen Platte wird ein rechtwinklichter und gleichschenklichter Triangel ABC von beliebiger Grösse ausgeschnitten, und indem man jeden Cathetum als einen Halbmesser

messer ansieht, so werden aus C gegen A und B die Tangenten jeder Grade von 0 bis 45 Grad aufgetragen, und die Grade so hingezeichnet, wie sie in der Figur zu sehen. Der mittlere Raum abc kann ausgeschnitten oder gelassen, und wenn man will, so können auf AB Maaßstäbe gezeichnet werden. Der Gebrauch ist nun folgender.

§. 3.

Daß man mit diesem Instrumente Perpendiculären ziehen könne, ist dadurch, daß ACB ein rechter Winkel ist, für sich klar; und eben so bedarf die Möglichkeit, Parallelinien zu ziehen, keiner weitern Erläuterung. So ist auch CAB = CBA an sich schon immer ein Winkel von 45 Grad. Ich habe demnach nur noch zu zeigen, wie jede andere Winkel können gezogen werden, je nachdem sie über oder unter 45 Gr. sind.

§. 4.

Es sey demnach auf der Linie DB in B ein Winkel z. E. von 25 Gr. zu ziehen, welcher gegen D offen sey. Hier wird das Instrument dergestalt auf die Linie DB gelegt, daß diese zugleich durch die Ecke B und durch den gegen über stehenden 25 Gr. gehe, und die Ecke B auf den fürgegebenen Punct B falle. Ist dieses geschehen, so wird längs BC eine Linie gezogen, und so wird CBD der verlangte Winkel seyn. Hätte der Winkel gegen E offen seyn Fig. II.
sollen,

sollen; so sieht man leicht, daß man die Ecke A und den gegenüber stehenden 25ten Gr. hätte gebrauchen müssen. So darf man auch nur die Figur umwenden, um sich der Lage des Instrumentes für die Fälle vorzustellen, wo die Linie abwerts zu ziehen ist.

§. 5.

Da hiebey der Winkel CDB = ADF = 65 Gr. ist, so wird man sich ohne Mühe vorstellen können, wie ein Winkel müsse gezogen werden, der über 45 Gr. ist. Denn ist z. E. auf DB ein Winkel CDB, oder FDA von 65 Gr. zu ziehen, so wird der 65te Gr. an D und die Ecke B auf die Linie DB angelegt, und längs CA eine Linie gezogen, welche den verlangten Winkel CDB oder FDA = 65 Gr. geben wird. Solte der Winkel nicht gegen E, sondern gegen F offen seyn, so wird wiederum die Ecke A und der gegenüber stehende 65te Gr. gebraucht. Daß man endlich, auf eben die Art, wie die Winkel gezeichnet werden könne, bereits gezeichnete messen kann, versteht sich für sich.

§. 6.

Es ist auch für sich klar, daß dieses Instrument fürnehmlich nur dient, um solche Winkel zu zeichnen und zu messen, deren Schenkel auf der Figur, so man zeichnen will, kleiner, oder wenigstens nicht viel grösser sind, als AC oder AB auf dem Instrumente ist. Bey grössern Figuren bedient man sich sicherer der trigonometrischen Tafeln. Denn ungeachtet in denselben heut zu Tage die Chorden nicht mehr vorkommen, so werden die Sinus leicht in Chorden verwandelt, weil der Sinus des halben Winkels doppelt genommen, der Chorde des ganzen Winkels gleich ist. Um aber dieses Verdoppelns überhoben zu seyn, darf man nur den Halbmesser von 50, 500, 5000 ꝛc. Theilen annehmen, welches, wenn man mit Maaßstäben von verschiedener Grösse versehen ist, immer so geschehen kann, daß der Halbmesser die verlangte Grösse habe, und wenigstens in Absicht auf die Grösse der Figur, die man zeichnen will, nicht zu klein sey. Nimmt man auf einem solchen Maaßstabe den Sinus des halben Bogens, so wird derselbe an sich schon die Chorde des ganzen Bogens seyn. Denn da der Halbmesser anstatt von 100, 1000, 10000 ꝛc. Theilen genommen zu werden, von 50, 500, 5000 ꝛc. genommen wird, so ist dadurch an sich schon jeder Theil doppelt grösser, und damit ist man der Verdoppelung des Sinus des halben Bogens überhoben. Uebrigens ist für sich klar, daß, sobald der fürgegebene Winkel über 90 Gr. ist, man besser thut, seinen Zusatz zu 180 Gr. zu bestimmen.

§. 7.

Was aber die Maaßstäbe von verschiedener Grösse betrift, so habe ich mir derselben zehen ver-

verfertigt, deren jeder beynahe einen vierten Theil grösser ist als der andere, und damit erhielte ich, daß mir der erste statt des 11ten, der 2te statt des 12ten 2c. dienen konnte, weil der 11te würde zehnfach grösser als der erste, und so auch der 12te zehnfach grösser als der 2te 2c. gewesen seyn. Diese Maaßstäbe habe ich numerottirt, um allenfalls der Figur beyzuschreiben, nach welchem sie ist gezeichnet worden, und so weiß ich mich immer wieder darein zu finden. Bey Zeichnung von krummen Linien geschieht es zuweilen, daß ich die Ordinaten nach einem andern Maaßstabe auftrage als die Abscissen, sofern es nur auf die Verhältnisse ankömmt. Und dieses geschieht, theils um der Grösse des Papieres Rechnung zu tragen, theils auch, um die Krümmung und Wendung der Linie augenscheinlicher, oder überhaupt um die Figur und die Lage ihrer Theile zu andern Absichten bequemer zu machen. Es wäre nicht unmöglich und vielleicht auch nicht undienlich, die Sprache von solchen Maaßstäben allgemein zu machen. Man dürfte nur bey dem einen derselben den Parisischen, Rheinländischen oder Londonschen Zoll zum Grunde legen, weil doch diese Maasse die bekanntesten sind.

VII.

VII. Anlage zur Tetragonometrie.

§. 1.

Die allgemeine Möglichkeit jedes Viereck durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu zerfällen, mag zu den Gedanken Anlaß gegeben haben, daß, wer in Berechnung und Auflösung der Triangel wohl bewandert ist, in der Berechnung und Auflösung viereckigter Figuren ohne Mühe fortkommen werde. Solte dieser Ausspruch mehr als eine bloße Möglichkeit angeben, so wird gegenwärtige Abhandlung nur für Anfänger bestimmt seyn, die sich in trigonometrischen Aufgaben, und besonders in dem algebraischen Theile der Trigonometrie entweder für sich, oder unter Anführung ihres Lehrers, üben, oder von daher Stof zu einer academischen Inauguraldisputation nehmen wollen. Denn ich werde mich hier begnügen, die möglichen Fälle der Tetragonometrie vorzuzählen, und die Anzahl der dabey vorkommenden Aufgaben zu bestimmen. Tab. I.

§. 2.

Wenn man ein Viereck, ohne es durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu thei-

theilen für sich betrachtet, so beut es weiter nichts als 4 Seiten und 4 Winkel, demnach in allem 8 Stücke an. Und da ist die Frage, wie fern einige dieser 8 Stücke durch die übrigen bestimmt werden, und wie vielerley Abwechselungen dabey möglich sind? Da man in der Algebra, sofern es nur die Frage ist, zu einer Gleichung zu gelangen, auf den Unterschied der gegebenen und gesuchten Stücke nicht sieht, so werde ich, um die vorzunehmende Abzählung einfacher zu machen, diesen Unterschied ebenfalls weglassen, weil derselbe vielmehr die Auflösung als die Erfindung der Gleichungen betrift.

§. 3.

Da in jedem Vierecke die Summe der vier Winkel 360 Gr. beträgt, so kann aus dreyen Winkeln der vierte für sich gefunden werden. Es müssen aber die Data von einander unabhängig seyn, demnach läßt sich in Absicht auf die Seiten des Viereckes aus allen vier Winkeln nicht mehr finden, als sich aus dreyen finden läßt. Das will nun sagen, daß in den Gleichungen, die wir zu suchen haben, höchstens nur drey Winkel vorkommen können, weil der vierte immer der Zusatz der drey übrigen zu 360 Gr. ist.

§. 4.

Indessen sind drey Winkel in so weit hinreichend, daß, wenn man noch zwo Seiten mit nimmt, das ganze Viereck dadurch bestimmt wird. Demnach kann von den zwoen andern Seiten noch eine mit in die Gleichung genommen werden. Und so haben wir den Satz, daß drey Winkel und drey Seiten einander bestimmen. Da nun in diesem Fall eine Seite und ein Winkel aus der Gleichung wegbleibt, so entstehen, in Absicht auf die Lage derselben, zween besondere Fälle. Denn es kann der wegbleibende Winkel entweder an der wegbleibenden Seite liegen, oder aber er liegt nicht an derselben und demnach zwischen zwoen von den in der Gleichung vorkommenden Seiten. Da es nun hiebey, in Absicht auf die Gleichung, nichts zu sagen hat, zwischen welchen von den drey Seiten der wegbleibende Winkel fällt; so ist es überflüßig, diesen zweyten Fall noch ferner einzutheilen. Demnach haben wir für drey Seiten und drey Winkel nur zween Fälle.

§. 5.

Wird ein Winkel weggelassen, so muß der Abgang durch eine Seite ersetzt werden, und da haben wir vier Seiten und zween Winkel, die ebenfalls einander bestimmen. Auch hier giebt es, in Absicht auf die Lage der Winkel, noch zween besondere Fälle, die sich leicht gedenken lassen. Denn die zween Winkel liegen entweder einander gegenüber, oder sie liegen an einer Seite.

§. 6.

Weiter läßt sich nun nicht gehen, weil ein Viereck nicht mehr als vier Seiten hat. Denn wolte man noch einen Winkel weglassen, so müßte noch eine Seite mit in die Gleichung genommen werden, und dieses würde also die fünfte Seite des Viereckes seyn. Wir haben demnach in allem nur vier allgemeine Fälle, und mit diesen vier Gleichungen. In jeder Gleichung kommen sechs Stücke vor, und jedes kann als ein Quæsitum betrachtet werden. Dieses giebt demnach für alle vier Gleichungen 24 Auflösungen, und damit eben so viele einzelne Fälle.

§. 7.

Diese 24 Fälle werden in den vier ersten Figuren vorgestellt. Es enthält nemlich die

I^te^ Figur: **Vier Seiten und zween entgegenstehende Winkel.** Und die dazu gehörende Gleichung ist

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\omega - 2cd\cos\psi.$$

II^te^ Figur: **Vier Seiten und zween nicht entgegenstehende Winkel.** Und die Gleichung dazu ist

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2a(b\cos\omega + c\cos\varphi) - 2bc\cos(\omega + \varphi).$$

III^te^ Figur: **Drey Seiten, zween aussen- und ein zwischenliegender Winkel.** Die Gleichung dazu ist

$$a\sin\omega = c\sin(\omega + \varphi) + d\sin\lambda.$$

IV^te^ Figur: **Sechs auf einander folgende Stücke.** Und die Gleichung dazu ist

$$c\sin\psi = a\sin(\varphi + \psi) - b\sin(\varphi + \psi + \omega).$$

In diesen vier Gleichungen werden alle Winkel spitz genommen. Wenn sie demnach bey vorkommenden Fällen stumpf sind, oder wenn die Summen $\omega + \varphi$, $\varphi + \psi$, $\varphi + \psi + \omega$ stumpf oder vollends grösser als 180 Grade sind, so müssen die Zeichen behörig verändert werden. Doch ist dieses erst dann vorzunehmen, wenn die Gleichung aufgelöst worden, weil bey den meisten Auflösungen die Functionen der Winkel noch ihre Gestalt ändern. Man sieht übrigens, daß nicht jede Auflösung gleich einfach und geschmeidig ist, und daß besonders alle sechserley Auflösungen der zweyten Gleichung irrationale und doppelte Werthe geben.

§. 8.

Alle die 24 Fälle, welche in diesen vier Gleichungen enthalten sind, können in der practischen Feldmeßkunst wirklich vorkommen, wo man ein viereckigtes Feld, wegen darauf und dazwischen liegenden Morästen, Sümpfen und Waldungen, dem Umkreise nach, auszumessen genöthigt ist, und wo sich weder alle Seiten noch alle Winkel gleich leicht oder bequem wirklich messen lassen.

§. 9.

Es sind aber diese 24 Fälle noch lange nicht alle, sondern nur diejenigen, wo man mit den Seiten und Winkeln am Umkreise ausreicht. Zerlegt man aber ein Viereck in zween Triangel, indem man eine Diagonale zieht, so ist es auf sehr vielerley Arten möglich, die gegebenen und gesuchten Stücke so zu vertheilen, daß nicht jeder der beyden Triangel für sich bestimmt, sondern beyde zusammengenommen werden müssen, wenn man zur Gleichung gelangen will. Diese Bedingung macht, daß die darunter begriffene Fälle nicht zur eigentlich sogenannten Trigonometrie, sondern zur Tetragonometrie gehören, und ihre eigene Verwickelungen, Schwürigkeiten und Auflösungen haben.

§. 10.

Diese Fälle habe ich von der 5ten Figur an bis zur 42ten vorgestellt, wie ich sie nach einer etwas mühsamen Abzählung habe finden und in Ordnung bringen können. Jede dieser Figuren hat eine ihr eigene Gleichung, und da in jeder sechserley Grössen vorkommen, deren jede als ein Quæsitum betrachtet werden kann, so giebt dieses für die 38 Figuren 6 mal 38, oder 228 verschiedene Fälle. Ich werde nun darüber folgende Anmerkung hersetzen.

§. 11.

In jeder dieser Figuren sind sechs Stücke gezeichnet, welche in die Rechnung gezogen werden müssen; und zwar die meisten nur mit einem —. Wo aber einer der Winkel, durch welche die Diagonale geht, ganz vorkommt, da ist in der Figur ein Bogen dadurch gezogen. In jeder Figur kömmt wenigstens einer von diesen Winkeln ganz oder ungetheilt vor, weil dadurch die beyden Triangel von einander abhängig gemacht werden. Aus eben dem Grunde kömmt entweder noch die Diagonal, oder einer von denen an derselben liegenden Winkeln, oder auch beyde vor, jedoch dergestalt, daß in keinem Triangel mehr als drey ganz bestimmte Stücke vorkommen, weil sonst in demselben überflüßige Data und in dem andern Triangel zu wenig seyn würden.

§. 12.

Ich habe die Figuren in der Ordnung gezeichnet, wie sie bey dem Abzählen muß vorgenommen werden. Und dieses mag die Beschreibung davon abkürzen. Der untere Diagonalwinkel kömmt in allen vor. Demnach blieben noch 5 Stücke zu zeichnen. Und da da bey vielerley Abwechselungen möglich sind, so habe ich, um sie zu claßificiren, bey der Diagonale angefangen. Diese kömmt in den Figuren 5, 6, 7 .... 25 vor, in den folgenden kömmt sie nicht vor. Beyde dieser Hauptclassen enthalten gleich viel Fälle, wenn man die 1, 2, 3, 4te Figur mit zu der letztern rechnet.

§. 13.

Die erste Hauptclasse, wobey nemlich die Diagonal vorkömmt, theilt sich in vier andere ein:

I°. Fig. 5, 6, 7 haben den obern Diagonalwinkel ganz.

II°. Fig. 8, 9, 10 haben dessen beyde Theile.

III°. Fig. 11, 12 .... 19 haben nur einen Theil desselben.

IV°. Fig. 20 .... 25 haben keinen Theil desselben, und zwar

Fig. 20 vier Seiten.

Fig. 21, 22 drey Seiten und einen Winkel.

Fig. 23, 24, 25 zwo Seiten und zween Winkel.

§. 14.

Die zweyte Hauptclasse, wobey die Diagonale wegbleibt, ist wiederum in Ansehung des obern Diagonalwinkels in zwo Classen Fig. 26 .... 31 und Fig. 32 .... 42, oder wenn man specialer gehen will, in 6 Classen getheilt, nemlich

I. Fig. 26, 27, 28,	IV. Fig. 35, 36, 37,
II. Fig. 29, 30, 31,	V. Fig. 38, 39, 40,
III. Fig. 32, 33, 34,	VI. Fig. 41, 42.

§. 15.

Die Auflösung aller dieser Fälle werde ich, wie Anfangs gesagt worden, denen überlassen, die

die sich in dem algebraischen Theil der Trigonometrie üben wollen. Die Erfindung der Gleichung für jede Figur kömmt immer auf den untern ungetheilten Diagonalwinkel an. In allen Figuren der zweyten Hauptclasse scheint es, als wenn in dem einen Triangel nicht genug Stücke wären; allein da muß man vermittelst der in den anliegenden Triangel vorkommenden Stücke die Diagonale bestimmen. Dadurch erhält man für den erstern Triangel das noch mangelnde Stück, und kann sodann vermittelst des untern Diagonalwinkels zur Gleichung gelangen. In der ersten Hauptclasse wird die Diagonal immer am mühsamsten gefunden, und bey verschiedenen geht es auch nicht einmal durch Construction leicht an. Ob übrigens alle die 228 Fälle in der Ausübung wirklich vorkommen und brauchbar sind, werde ich eben nicht stückweise untersuchen. Wenn man aber in der

8ten Figur die Diagonale,

29ten Figur den hintern Winkel,

30ten Figur die obere Seite

als ein Quæsitum ansieht, so enthalten diese Figuren eine Aufgabe, die eine von den schönsten und brauchbarsten in der practischen Geometrie ist, und wovon ich in den Anmerkungen und Zusätzen zur practischen Geometrie vier verschiedene Auflösungen gegeben habe.

VIII.

Anmerkungen über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen.

§. 1.

Tab. II. Es ist aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade von der Auflösung einer cubischen Gleichung abhängt, auf welche sich jene reduciren läßt, und daß, wenn bey jener alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real sind, die drey Wurzeln der letztern real sind. Da nun dieser letztere Fall immer auf die Trisection eines Circulbogens reducirt werden kann, so sieht man überhaupt leicht ein, daß sich auch jede Biquadratgleichungen, deren Wurzeln sämtlich entweder unmöglich oder real sind, auf die Trisection eines Circulbogens solle können reduciren lassen. Die Frage ist nun, die Methode dazu zu finden und brauchbar zu machen.

§. 2.

Um in der Auflösung dieser Frage nicht ohne Noth Weitläuftigkeiten einzumengen, so werden wir setzen, daß in der fürgegebenen Biquadratgleichung das zweyte Glied weggeschaft sey, weil

weil dieses in jedem Falle, ohne Mühe voraus geschehen kann. Es sey demnach

$$o = x^4 + Ax^2 + Bx + C.$$

Man sehe diese Gleichung als das Product zwoer Quadratgleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = xx - ax + c$$

an, welches

$$\begin{aligned} o = x^4 &+ bx^2 + acx + bc \\ &+ c \quad - ab \\ &- aa \end{aligned}$$

ist, so lassen sich durch die Vergleichung der Glieder die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmen, und die gesuchten vier Wurzeln werden sodann

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - c)}$$

seyn. Wird nun die Vergleichung der Glieder angestellt, so ist

$$A = b + c - aa$$
$$B = ac - ab$$
$$C = bc$$

demnach

$$c + b = A + aa \qquad 2c = A + aa + B : a.$$
$$c - b = B : a \qquad 2b = A + aa - B : a.$$
$$(c+b)^2 - (c-b)^2 = 4bc = 4C = (A+a^2)^2 - B^2 : a^2$$
$$4C = A^2 + 2a^2 A + a^4 - B^2 : a^2$$

folglich

$$\begin{aligned} o = a^6 + 2a^4 A + A^2 a^2 &- B^2 \\ &- 4Ca^2 \end{aligned}$$

Man setze

$$a^2 = z - \tfrac{2}{3}A$$

so ist, wenn man diesen Werth substituirt und die Reduction vornimmt,

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z &- \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4Cz &+ \tfrac{8}{3}CA \\ &- B^2 \end{aligned}$$

Man setze nun

$$z = r \text{ cosin. } v$$
$$r \text{ cos. } 3v = D$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD.$$

Wird diese mit der erst gefundenen verglichen, so ist

$$\tfrac{3}{4}rr = \tfrac{1}{3}A^2 + 4C$$
$$\tfrac{1}{4}rrD = \tfrac{2}{27}A^3 - \tfrac{8}{3}CA + B^2$$

folglich

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12C + A^2)}$$
$$D = (2A^3 - 72CA + 27B^2):(36C + 3A^2)$$

Endlich, wenn man in den für x gefundenen zwo Gleichungen die für c, b gefundene Werthe setzt, so sind alle vier Wurzeln

$$x = \pm\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a^2 \mp B:2a)}.$$

§. 3.

Wir haben nun nur den Rückweg zu nehmen, um die Operationen anzuzeigen, durch welche man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

findet. Dieses geschiehet demnach folgendermaßen:

1°.

1°. Man macht

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12C + AA)}$$
$$D = (2A^3 - 72CA + 27BB):(36C + 3AA)$$

2°. Sodann setzt man

$$D:r = \text{cosin. } 3v,$$

und nachdem man den Bogen 3 v gefunden, so sucht man den Cosinus von v, und macht

$$r. \text{ cos. } v = z$$
$$\sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)} = a.$$

3°. Hat man nun a gefunden, so sind

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

die gesuchte vier Wurzeln.

§. 4.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

so ist

$$A = -15$$
$$B = +10$$
$$C = +24$$

demnach

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.24 + 15.15)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{513} = \sqrt{228}$$
$$D = \frac{-2.15^3 - 72.24.15 + 27.10.10}{36.24 - 3.15.15} = \frac{270}{19}$$
$$\text{cosin. } 3v = D:r = 270:19\sqrt{228} = 135:\sqrt{(3.19^3)}$$

½ log.

$$\tfrac{1}{2}\log. 228 = \log. r = 1,1789674$$

$$\log. 270 = 2,4313638$$
$$\log. 19 = 1,2787536$$

$$\log. 270:19 = 1,1526102$$

$$\log. \cos. 3v = 0,9736428 - 1$$

demnach $3v = 19^\circ.\ 45'.\ 37\tfrac{1}{7}''$
$$v = 6.\ 35.\ 12\tfrac{1}{3}$$
$$\log. \cos. v = 0,9971238 - 1$$
$$\log. r = 1,1789674$$

$$\log. z \ldots\ldots = 1,1760912$$

$$z = 15$$

Ferner $a^2 = z - \tfrac{2}{3}A = 15 + 10 = 25$
$$a = 5$$

und
$$x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} - \tfrac{10}{10})} = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} + \tfrac{10}{10})} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

demnach sind die Wurzeln $+3, +2, -4, -1$.

§. 5.

Da sich auf diese Art nur diejenigen Biquadratgleichungen auflösen lassen, welche alle Wurzeln entweder unmöglich oder real haben, so kömmt es darauf an, die Grenzen zu bestimmen, in welchen solches möglich ist. Man sieht aus dieser Auflösung, daß es erstlich auf den Ausdruck

$$D : r = \cos. 3v$$

ankömmt.

ankömmt. Denn ein Cosinus kann nicht grösser als 1 seyn. Werden demnach für D, r die gefundenen Werthe gesetzt, so muß

$$(2A^3 - 72CA + 27B^2) : 2(12C + AA)^{3:2} < 1$$

folglich

$$2A^3 - 72CA + 27B^2 < 2(12C + AA)^{3:2}$$

seyn, und unter dieser Bedingung sind demnach alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real. Man sieht zugleich, daß eben diese Bedingung voraussetzt, es müsse sich aus

$$12C + AA$$

die Quadratwurzel können ausziehen lassen, und folglich wenn C negativ ist, 12 C kleiner als AA seyn. Beydes geht nun allemal an, wenn die vier Wurzeln sämtlich entweder real oder unmöglich sind, weil in diesen Fällen die cubische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z &- \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4Cz &+ \tfrac{8}{3}CA \\ &- BB \end{aligned}$$

drey reale Wurzeln hat. Es kömmt demnach ferners auf den Ausdruck

$$a = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

an, welcher ebenfalls real seyn muß, dafern in den Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

keine andere Unmöglichkeit seyn solle, als die, welche

welche aus den Wurzelzeichen, womit sie an sich schon behaftet sind, herrühren kann.

§. 6.

Da demnach hiebey so viele Bedingungen vorkommen, so ist leicht zu erachten, daß die Möglichkeit aller vier Wurzeln in sehr engen Schranken eingeschlossen seyn müssen. Die allgemeine Methode, dadurch man sonst diese Frage entscheidet, giebt an, man solle in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das letzte Glied C als veränderlich ansehen, und bestimmen, wenn es ein maximum oder ein minimum wird. Denn ist es sodann in der fürgegebenen Gleichung grösser als das maximum, oder kleiner als das minimum, so läßt sich daraus schliessen, ob die Gleichung reale Wurzeln hat oder nicht. Wenn man diesem zufolge die Gleichung differentirt und $dC = 0$ setzt, so erhält man

$$0 = 4x^3 + 2Ax + B$$

eine cubische Gleichung, welche man aufzulösen hat, um diejenigen x zu bestimmen, unter welchen C ein maximum oder ein minimum wird. Sind in dieser Gleichung zwo Wurzeln unmöglich, so fallen dadurch schon zwo Wurzeln aus der fürgegebenen Biquadratgleichung ins Unmögliche, und C hat nur ein maximum zur Grenze der Möglichkeit der zwo übrigen Wurzeln.

§. 7.

§. 7.

Da hiebey eine Cubicgleichung aufzulösen, bey der vorhergehenden Probe aber eine Trisection eines Circulbogens vorzunehmen ist, welche ungefehr eben so viel als eine Cubicgleichung sagen will; so habe ich auf Mittel gedacht, beydes zu vermeiden, und die Grenzen der Möglichkeit der Wurzeln auf eine deutlichere und mehr in die Augen fallende Art kenntlich zu machen. Zu diesem Ende merke ich an, daß, wenn man in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das Zeichen des dritten Gliedes $+B$ in $-B$ verwandelt, man dadurch an der Gleichung weiter nichts ändert, als daß die positive Wurzeln negativ, und hinwiederum die negativen positiv werden. Da dieses auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln keinen Einfluß hat, so werde ich das Zeichen des dritten Gliedes, in dieser Absicht, als Gleichgültig ansehen.

§. 8.

Hingegen hat es mit dem Zeichen des zweyten und vierten Gliedes eine ganz andere Bewandniß. Ihre Verwechselung hat in die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln, einen sehr beträchtlichen Einfluß. Und besonders muß der Fall, wo A positiv ist, anders behandelt werden, als wo A negativ ist, weil dieser letztere Fall mehrere Umstände darbeut.

Um

Um demnach bey dem ersteren anzufangen, so setze ich

$$x^4 + Ax^2 = Bx - C = z$$

Hier ist nun offenbar z positiv, es mag nun x
Fig. I. positiv oder negativ seyn. Nimmt man auf AP die Abscissen x, und richtet die Ordinaten

$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

auf, so läßt sich die Linie NAM construiren, welches ebenfalls der andern Gleichung

$$z = Bx - C$$

genügen leisten wird. Man sieht zu diesem Ende B als eine Tangente eines Winkels φ an, und indem man RAP $= \varphi$ macht, und die Linie AR zieht, so macht man AQ $= -C$, und zieht durch Q die Linie QM mit AR parallel. Denn so hat man, wenn AP $= x$ ist,

$$PR = AP.\ \text{tang.}\ \varphi = Bx$$
$$RM = AQ = C$$

folglich $PM = Bx - C = z$.

§. 9.

Nun solte, wenn die Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 B \pm x + C$$

reale Wurzeln hat, die Linie QM allemal die krumme Linie NAM entweder berühren oder schneiden. Denn man muß für z einerley Werth finden, es sey daß man $x^4 + Ax$ aus P in M trage, oder PM durch $Bx - C$ bestimme. In der Figur ist QM so gezogen, daß sie die Linie NAM berühre. Und dieses macht,

macht, daß, so lange der Winkel RAP $= \varphi$ beybehalten wird, Q der tiefste Punct ist, der einen Durchschnitt zulasse. Man sieht daraus, daß wenn in der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

C positiv ist, dieses Glied eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf, wofern die Gleichung mögliche Wurzeln haben solle. Ist aber C negativ, so fällt Q über A, und da sind zween Durchschnittspuncten schlechthin nothwendig. Wenn demnach A positiv, C aber negativ ist, so hat die Gleichung nothwendig zwo mögliche und zwo unmögliche Wurzeln.

§. 10.

Ist aber C positiv, so fällt Q unter A, und da sind zuweilen zween Durchschnitte möglich. Man sieht leicht, daß dieses theils von dem Winkel RAP, theils auch von der Grösse der Linie AQ $= C$ abhängt. Wir werden um beydes zu bestimmen, den Winkel RAP aufsuchen, unter welchem, wenn AQ angenommen wird, QM die Linie NAM berührt. Denn man sieht leicht, daß dieses der kleinste ist, unter welchem Durchschnitte möglich sind. Es sey demnach

$$AP = x,$$
$$PM = z$$
$$x^4 + Ax^2 = z,$$

so ist $\text{tang.}\,\varphi = B = \frac{dz}{dx} = 4x^3 + 2Ax.$

$$PR = x\,\text{tang.}\,\varphi = 4x^4 + 2Ax^2$$
$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

demnach

$$PR - PM = 3x^4 + Ax^2 = C$$
$$x = \surd(-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + C))$$

folglich

$$B = 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{3:2} +$$
$$2A\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{1:2}$$

Dieses ist demnach die kleinste Tangente, unter welcher zween Durchschnitte, und daher auch zwo Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

möglich sind. Wenn nemlich, wie wir es hier nehmen, A und C positiv sind, so muß

$$B > 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{3:2} +$$
$$2A[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

seyn.

§. 11.

Diese Formel würde gar keinen Werth geben, wenn man darin C negativ setzen wolte, es sey denn, daß man auch A negativ machte. Dieses will nun sagen, daß nur in dem Fall, wo A negativ ist, der Punct Q über der Linie AP, oder innert der Linie NAM sey, und dadurch eine Tangente gezogen werden kann. Wie

Wie dieses möglich wird, werden wir nun noch untersuchen, indem wir uns zu der Betrachtung des zweyten allgemeinen Falles wenden, in welchem nemlich A negativ ist.

§. 12.

Es sey demnach

$$x^4 - Ax^2 = +Bx - C = +z.$$

Man setze Fig. II.

$$AP = x$$
$$PM = z$$

so wird sich vermittelst der Gleichung

$$x^4 - Ax^2 = -z$$

die Linie NEBAMFL construiren lassen, welche allemal eine in A eingebogene Gestalt hat, weil die kleinern Ordinaten anfangs negativ und erst nachgehends positiv werden, nachdem $x^2 > A$ wird. Diese Linie hat ferner immer in A ein maximum, in E, F zwey minima, und zwischen E, A, F zween Wendungspuncten. Dieses macht, daß sich, jedoch unter gewissen Bedingungen, drey parallele Tangente ziehen lassen, so ofte nemlich eine an dem eingebogenen Theile gezogen wird.

§. 13.

Hiebey giebt es nun, in Ansehung der Durchschnitte, drey verschiedene Fälle. Einmal, so oft eine Linie den eingebogenen Theil EAF durchschneidet, so durchschneidet sie auch die auswertigen EN, FL. Man sieht leicht, daß

 Die

die Linien EF, BD, deren erstere die beyden minima berührt, die andere aber die Tangente bey dem Wendungspunct B ist, die äussersten von denen sind, welche vier Durchschnitte machen können, und daß eben so der Winkel BDC unter allen der kleinste ist, imgleichen daß jede Linie, welche vier Durchschnitte machen solle, zwischen C und D durchgehen müsse, folglich in der Gleichung das vierte Glied, wenn es positiv ist, nicht grösser als AD, und wenn es negativ ist, nicht grösser als AC seyn könne, dafern alle vier Wurzeln sollen können real seyn. Diese zween Grenzpuncten lassen sich nun leicht bestimmen. Denn für C wird z ein minimum, demnach

$$dz = (4x^3 - 2Ax)\,dx = 0$$
$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}A}$$
$$AC = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{2}A^2 = -\tfrac{1}{4}A^2$$

Sodann wird D durch die Tangente des Wendungspunct bestimmt. Für diesen ist

$$ddz = (12x^2 - 2A)\,dx^2 = 0$$
$$AG = x = \sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$GB = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{6}A^2 = -\tfrac{5}{36}A^2$$

Es ist aber

$$(GB + AD) : AG = dz : dx = 4x^3 - 2Ax = -\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A},$$

folglich

$$(\tfrac{5}{36}A^2 + AD) : \sqrt{\tfrac{1}{6}A} = \tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$AD = \tfrac{4}{18}A^2 - \tfrac{5}{36}A^2 = \tfrac{1}{12}A^2.$$

§. 14.

Fällt demnach das vierte Glied zwischen CD, so sind zwo Wurzeln nothwendig real, und die zwo andern können es seyn, wenn B nicht zu groß ist. Es sey z. E. das vierte Glied C = AQ. Man ziehe aus Q die Tangente QM, und durch M die Ordinate MP; so ist

$$AP = x$$
$$PM = +z$$

Nun ist $x^4 - Ax^2 = +z$

$$\frac{dz}{dx} = \text{tang. } MTP = 4x^3 - 2Ax = +B$$
$$Qm = -Bx = 4x^4 - 2Ax^2$$
$$PM = x^4 - Ax^2$$
$$Qm - PM = 3x^4 - Ax^2 = +C.$$

Dieses giebt nun eben so wie vorhin (§. 10.)

$$B = 4\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

welches demnach die Lage der aus dem Punct Q gezogenen Tangente angiebt, welche zugleich die Grenzlinie der realen Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 \pm Bx \pm C$$

ist. Wir werden nun sehen, wie sich diese Grenzen nach den verschiedenen Werthen des letzten Gliedes C richten. Und da haben wir folgende Fälle:

I°. Wenn C positiv ist, so fällt Q unterhalb A. Ist nun in diesem Fall C grösser als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q unter die Linie EF, zwo Wurzeln sind unmöglich, und sollen die übrigen beyden möglich seyn, so muß

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

seyn, wiedrigenfalls sind alle vier unmöglich.

II. Ist aber C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q zwischen AC, und da sind zwo Wurzeln nothwendig real. Sollen es die beyden andern auch seyn, so muß

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

seyn. Denn in diesem Fall hat die Tangente QM eine umgekehrte Lage, weil sie in EF durch den 90ten Grad geht.

III. Ist hingegen C negativ und kleiner als AD, so fällt Q nicht nur über A, sondern die Formel giebt, in diesem Fall, für B zween reale Werthe. Dieses will nun sagen, daß wenn z. E. C = Aq ist, durch den Punct q zwo Tangenten qk, qn können gezogen werden. Demnach muß in diesem Falle

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)}]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

und

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A - \sqrt{(\tfrac{1}{36}A - \tfrac{1}{3}C)}]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A - \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

seyn.

seyn. Wiedrigenfalls sind nur zwo Wurzeln real.

IV. Ist endlich C negativ und grösser als AD, so giebt die Formel für B gar keinen realen Werth. Das will nun sagen, man könne durch den Punct Q, wenn derselbe über D hinauf fällt, keine Tangente ziehen. Es sind auch in diesem Fall nothwendig zwo Wurzeln real, und zwo unmöglich.

§. 15.

Wenn in der Gleichung das Glied B = o ist, so lassen sich alle diese Formeln sehr abkürzen. Denn so sind

I°. in der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 + C$$

alle vier Wurzeln unmöglich.

II. In der Gleichung

$$o = x^4 \pm Ax^2 - C$$

sind immer zwo Wurzeln real und zwo unmöglich.

III. In der Gleichung

$$o = x^4 - Ax^2 + C$$

sind alle vier Wurzeln real, wenn C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$ ist. Ist aber C grösser als $\frac{1}{4}A^2$ so sind alle vier Wurzeln unmöglich. Alles dieses erhellet auch daraus, daß die Gleichnng

$$o = x^4 - ax^2 + b^2$$

aufgelöst, die Wurzeln

$$2x = \pm\sqrt{(a + 2b)} \pm \sqrt{(a - 2b)}$$ giebt.

§. 16.

Ist hingegen der zweyte Coefficient $A = 0$, so haben wir die erste Figur, und da sind immer zwo Wurzeln unmöglich. Die übrigen zwo sind real, wenn C negativ ist. (§. 9.) Ist aber C positiv, so sind diese zwo Wurzeln nur alsdann real, wenn

$$B > 4\left(\frac{C}{3}\right)^{3:4}$$

oder

$$27 B^4 > 256 C^3 \text{ ist.}$$

§. 17.

Man wird übrigens aus dem §. 10. und §. 14. ersehen, daß die hier gebrauchte Methode deswegen angieng, weil sich aus der Gleichung

$$3x^4 \pm Ax^2 = C$$

die Wurzel sehr leicht ausziehen liesse. Ungeachtet aber dieses Verfahren bey höhern Gleichungen so unbedingt nicht angeht, so finden sich doch ganze Classen derselben, bey denen es angebracht werden kann. So z. E. lassen sich auf diese Art bey jeder Gleichung von drey Gliedern

$$x^m + Ax + B = 0$$

und so auch bey jeder Gleichung von folgender Form

$$x^{2m} + Ax^m + Bx + C = 0$$

die Anzahl der realen Wurzeln und die Schranken ihrer Möglichkeit bestimmen. Ich werde mich aber hier dabey nicht lange aufhalten, sondern zu andern Betrachtung fortschreiten, die sich über die Gleichungen machen lassen.

§. 18.

§. 18.

Seit dem man gefunden, daß jede Gleichung als ein Product von einer gewissen Anzahl Gleichungen vom ersten Grade angesehen werden kann, und daß sich mit den Wurzeln verschiedene Veränderungen vornehmen lassen, so hat man mit solchen Veränderungen verschiedene Proben gemacht, und zu dem Ende für die Wurzel x, bald $y \pm a$, bald $y\,a$, bald $y : a$, bald auch y^n gesetzt, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, die man zu verschiedenen Absichten besser gebrauchen konnte. Besonders wird, wenn man $x = y^n$ setzt, und n eine ganze Zahl ist, die Gleichung in eine andere verwandelt, welche von n mal höherm Grade ist, und daher n mal mehr Wurzeln hat. Sind hiebey alle Wurzeln x negativ, so werden alle Wurzeln y unmöglich, so oft n eine gerade Zahl ist. Und so viele Wurzeln x negativ sind, wird man n mal so viel unmögliche Wurzeln y haben. Sind hingegen alle Wurzeln x positiv, und n ist eine gerade Zahl, so wird man für jede Wurzel x zwo mögliche, und $n - 2$ unmögliche Wurzeln y haben. Ist aber n eine ungerade Zahl, so erhält man für jede Wurzel x eine mögliche, und $n - 1$ unmögliche Wurzeln. Sind endlich einige Wurzeln x unmöglich, so erhält man für jede derselben n unmögliche Wurzeln y. Alles dieses folgt ohne Mühe aus der Gleichung

$$y^n - x = 0.$$

N 5 §. 19.

§. 19.

Will man hiebey für n eine gebrochene Zahl setzen, z. E. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ rc. so wird man mehrentheils eine Gleichung erhalten, worin die Exponenten von y gebrochne Zahlen sind, und damit läßt sich nicht viel ausrichten. Ich sage mehrentheils: denn hat x an sich schon solche Dignitäten, die sich durch einen Bruch n aufheben, oder auf ganze Zahlen bringen lassen, so ist dieses ein Fall, bey welchem man schon oft mit Vortheil $y^n = x$ gesetzt hat. So z. E. hatten wir oben (§. 2.) die Gleichung

$$o = a^6 + 2a^4 A + A^2 a^2 - B^2. \atop \qquad\qquad -4Ca^2$$

Da sich hier alle Exponenten von a durch 2 dividiren lassen, so kann man

$$a = y^{1:2}$$

setzen, und dadurch die Gleichung in

$$o = y^3 + 2Ay^2 + A^2 y - B^2 \atop \qquad\qquad -4Cy$$

verwandeln, welche nun nur vom dritten Grade ist. Dieses wäre nun nicht angegangen, wenn in der ersten Gleichung ungerade Exponenten von a vorgekommen wären.

§. 20.

Man hätte sich aber nach der Betrachtung der bisher erwähnten Verwandlungen zu folgenden Aufgaben wenden können, die wir hier auflösen werden: **Eine Gleichung von jedem Grade in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln Quadrate, Cubi oder jede Dignitäten von den Wurzeln der erstern sind:** Ungeachtet die Methode zur Auflösung dieser Aufgabe allgemein ist, so werden wir doch bey den Quadraten anfangen, weil dieser eine besondere Auflösung der Aufgabe zulassen.

§. 21.

Es sey demnach eine jede Wurzel der fürgegebenen Gleichung

$$x + a = o.$$

Man nehme ganz willkührlich noch eine andere

$$x - a = o$$

und multiplicire diese beyde Gleichungen mit einander, so hat man

$$x^2 - a^2 = o.$$

Man setze nun

$$x^2 = y$$

so ist

$$y - a^2 = o$$

demnach y das Quadrat der Wurzel x. Hiebey haben wir nun weiter nichts gethan, als daß wir zu der Wurzel $-a$ noch eine andere $+a$ genommen haben. Es mag nun a positiv oder negativ seyn, so erhält man immer

$$y - a^2 = o$$

eine positive Wurzel der neuen Gleichung. Da man aber die Gleichung vorerst auflösen müste, wenn man dieses mit jeder Wurzel x besonders vor-

vornehmen wolte, so haben wir nur noch zu sehen, wie es ohne die Auflösung der Gleichung geschehen kann.

§. 22.

Nun weiß man, daß bey jeder Gleichung die positiven Wurzeln in negative, und die negativen in positive verwandelt werden, wenn man bey dem zweyten, vierten, sechsten etc. Gliede das Zeichen verwechselt. Man darf daher nur die Gleichung, so durch diese Verwechslung der Zeichen entsteht, mit der fürgegebenen multipliciren, so werden in dem Product alle ungerade Dignitäten von $x = 0$, und damit kann man $x^2 = y$ setzen, um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln Quadrate von den Wurzeln der fürgegebenen Gleichung sind.

§. 23.

Es sey demnach überhaupt

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

so macht man

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{etc.}$$

Werden nun diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{lllll} 0 = x^{2m} & + 2bx^{2m-2} & + 2dx^{2m-4} & + 2fx^{2m-6} & + \text{etc.} \\ & - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. & \\ & & + bb\,.. & + 2bd\,.. & \\ & & & - cc\,.. & \end{array}$$

Setzt

Setzt man demnach

$$xx = y$$

so erhält man

$$\begin{array}{lllll} 0 = y^m & + 2by^{m-1} & + 2dy^{m-2} & + 2fy^{m-3} & + \text{etc.} \\ & - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. & \\ & & + bb\,.. & + 2bd\,.. & \\ & & & - cc\,.. & \end{array}$$

eine Gleichung deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

sind. Wir werden nun hievon ein und andern Gebrauch machen.

§. 24.

Es sey z. E. die cubische Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wird diese mit

$$0 = x^3 - ax^2 + bx - c$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{array}{llll} 0 = y^3 & + 2by^2 & - 2acy & - cc \\ & - aay^2 & + bby & \end{array}$$

Es ist unnöthig zu erinnern, daß man jede der Coefficienten a, b, c negativ nehmen könne, wenn in einem fürgegebenen Fall nicht alle Glieder positiv sind.

§. 25.

Man setze nun die letzte Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC,$$

so

so kann man den Rückweg nehmen, und die erstere wiederum daraus herleiten, indem man die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmt. Dieses will sodann sagen: **Wenn eine cubische Gleichung gegeben, eine andere zu finden, deren Wurzeln Quadratwurzeln der ersten sind.** Diese Aufgabe ist nun nicht mehr so einfach, wie die vorhergehende, weil man an statt einer Gleichung mehrere findet, die der Bedingung genügen leistet. Denn jede Quadratzahl hat sowohl eine positive als negative Wurzel, und beyde thun der Bedingung ein Genügen. Man setze die Wurzeln der Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

seyn p^2, q^2, r^2, so sind die Quadratwurzeln davon

$$\begin{matrix}+p, & +q, & +r\\ -p & -q & -r\end{matrix}$$

aus diesen lassen sich nun 8 cubische Gleichungen machen, deren Wurzeln

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
$+q$	$+q$	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$	$-q$	$-q$
$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$

sind. Man würde daher auf eine Gleichung vom 8ten Grade verfallen, wenn der letzte Coefficient CC = cc nicht an sich schon zwo allgemeine Classen angäbe, wodurch die Gleichung auf den vierten Grad herunter gesetzt wird.

§. 26.

Um aber die Auflösung vorzunehmen, so haben wir

$$cc = CC \text{ und daher } c = C$$
$$2b - aa = A$$
$$bb - 2ac = B = bb - 2aC$$

Hieraus findet man

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{matrix}A^2\\ -4B\end{matrix}$$

§. 27.

Diese Gleichung werde ich eben hier nicht auflösen, sondern noch einen andern Rückweg nehmen, und zeigen, wie wenn man jede Glei- vom vierten Grade, deren zweytes Glied = o chung ist, mit der gegenwärtigen vergleicht, man auf die cubische Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

kommen, und nachdem man ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, sodann auch die Wurzeln der Gleichung vom vierten Grade haben könne, welche man mit

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{matrix}A^2\\ -4B\end{matrix}$$

verglichen hatte. Denn da a der Coefficient des zweyten Gliedes der Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und folglich die Summe ihrer Wurzeln ist, so ist

$$a = p + q + r.$$

§. 28.

Da es genug ist, dieses Verfahren in einem Beyspiele zu zeigen, so werde ich die oben (§. 4.) schon gebrauchte Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

oder, wenn wir a für x setzen

$$0 = a^4 - 15a^2 + 10a + 24$$

dazu gebrauchen. Diese mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8C + A^2 \atop \qquad\qquad\qquad -4B$$

verglichen, giebt

$$A = -\tfrac{15}{2}$$
$$C = -\tfrac{5}{4}$$
$$B = +\tfrac{129}{16}$$

demnach, wenn diese Werthe in der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

gesetzt werden,

$$0 = y^3 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{129}{16}y - \tfrac{25}{16}$$

eine cubische Gleichung, von deren Auflösung die Auflösung der fürgegebenen Gleichung vom 4ten Grade abhängt.

§. 29.

Man setze, um erstlich die Brüche aufzuheben,

$$y = \tfrac{1}{4}v$$

so ist

$$0 = v^3 - 30v^2 + 129v - 100$$

Ferner setze man, um das zweyte Glied wegzuschaffen,

$$v = z + 10,$$

so ist

$$0 = z^3 - 171z - 810.$$

Vergleicht man diese Gleichung eben so wie oben (§. 2.) mit

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD,$$

so findet man

$$\tfrac{3}{4}rr = 171$$
$$\tfrac{1}{4}rrD = 810$$

folglich

$$r = \sqrt{228}$$
$$D = \frac{270}{19}$$

welches eben die Werthe sind, die wir oben (§. 4.) gefunden haben. Wir haben demnach auf eben die Art die Wurzel $z = 15$, und damit die beyden übrigen $z = -6$ und $z = -9$. Da nun $v = z + 10$ ist, so sind 25, 4, 1 die drey Werthe von v, und eben so $\frac{25}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$ die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ ist, so sind $\pm\frac{5}{2}$, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ die drey Werthe von x. Nun ist a deren Summe, demnach ist

$$a = \pm\tfrac{5}{2} \pm 1 \pm \tfrac{1}{2}$$

dieses giebt achterley Werthe, von denen wir aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$
$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$
$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$
$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

 gebrau-

gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung Genügen thun.

§. 30.

So ofte in der Gleichung (§. 23.)

$$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

alle Wurzeln real sind, sie mögen nun positiv oder negativ seyn, so ofte sind auch in der andern Gleichung

$$\begin{array}{llll} o = y^m & + 2b\, y^{m-1} & + 2d\, y^{m-2} & + 2f\, y^{m-3} + \text{ꝛc.} \\ & - aa & - 2ac.. & - 2ae.. \\ & & + bb.. & + 2bd.. \\ & & & - cc.. \end{array}$$

die Wurzeln nicht nur real, sondern sämtlich positiv, weil sie Quadrate von den Wurzeln x sind. Wird demnach diese zweyte Gleichung in Zahlen gerechnet, so wird sich jedesmal finden, daß die Zeichen $+ -$ der Ordnung nach abwechseln.

§. 31.

Findet sich aber diese einförmige Abwechselung nicht, so ist es nothwendig ein Zeichen, daß in der ersten Gleichung einige Wurzeln unmöglich seyn müssen. Es sey z. E. die Gleichung

$$o = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

wird diese mit

$$o = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

multiplicirt, so ist das Product, wenn man $x^2 = y$ setzt,

$$o = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1.$$

Da

Da nun hier gar keine Abwechselung der Zeichen ist, so hat die Gleichung

$$o = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

nothwendig unmögliche Wurzeln.

§. 32.

Es läßt sich aber diese Anmerkung nicht umkehren, weil der unmöglichen Wurzeln ungeachtet, die Zeichen zuweilen dennoch einförmig abwechseln können. Um dieses auf eine allgemeinere Art aufzuklären, und zugleich die Umstände zu bestimmen, wo die Abwechselung der Zeichen auch bey den unmöglichen Wurzeln statt hat, so sey eine derselben

$$o = x + a + b\sqrt{-1}.$$

Sind nun alle Coefficienten der Gleichung rational, so hat die Gleichung nothwendig noch eine andere Wurzel von der Form

$$o = x + a - b\sqrt{-1}.$$

Werden diese beyden Wurzeln mit einander multiplicirt, so ist das Product

$$\begin{array}{l} o = x^2 + 2ax + aa \\ \qquad\qquad\quad + bb \end{array}$$

ein Factor der Gleichung. Man nehme nun den Factor

$$\begin{array}{l} o = x^2 - 2ax + aa \\ \qquad\qquad\quad + bb \end{array}$$

und multiplicire damit den erstern, so ist, wenn man $x^2 = y$ setzt, das Product

$$o = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

 der

der correspondirende Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln y, Quadrate der Wurzeln x werden sollen. Ist nun hiebey $a > b$, so wird in diesem Factor das zweyte Glied negativ, und damit hat, der unmöglichen Wurzel unerachtet, die Abwechselung der Zeichen statt. Man sieht leicht, daß eine Gleichung von lauter unmöglichen Wurzeln aus lauter solchen Wurzeln

$$0 = x \pm a \pm b\sqrt{-1}$$

wo $a > b$ ist bestehen, und damit in der zweyten Gleichung (§. 30.) eine einförmige Abwechselung der Zeichen statt finden kann. Man sieht aber auch, daß, wenn in allen Wurzeln $a < b$ ist, alsdann in dieser zweyten Gleichung nothwendig alle Zeichen $+$ sind. Mischen sich aber beyde Fälle durcheinander, oder kommen zu den unmöglichen Wurzeln noch reale hinzu, so kann man für die Folge und Abwechselung der Zeichen keinen so unbedingten Schluß machen, ungeachtet man, wenn die Abwechselung der Zeichen nicht durchgängig ist, sicher schliessen kann, daß in der ersten Gleichung unmögliche Wurzeln seyn müssen.

§. 33.

Wenn man zu dem Factor

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

den Factor

$$0 = y^2 - 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

nimmt, und indem man beyde mit einander multi-

multiplicirt, in dem Producte $y^2 = z$ setzt, so erhält man

$$0 = z^2 - 2(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^2 + (aa + bb)^4$$

einen Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x sind. In diesem Factor ist nun das zweyte Glied alsdenn negativ, wenn

$$a^4 + b^4 > 6a^2b^2$$

oder

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > 8a^2b^2$$

oder

$$a^2 + b^2 > 2ab\sqrt{2}$$

ist, welches sich zuträgt, so ofte entweder

$$a > b(1 + \sqrt{2})$$

oder

$$b > a(1 + \sqrt{2})$$

ist. Da demnach hier nur erfordert wird, daß a, b in grösserer Verhältniß ungleich seyn, als 1 zu $1 + \sqrt{2}$ ist; so trägt sich dieses öfters zu, als die Bedingung bey den Quadraten, welche fordert, daß $a > b$ seyn müsse. Es kann daher auch leichter geschehen, daß eine Abwechselung der Zeichen statt findet, wenn man eine Gleichung in eine solche verwandelt, deren Wurzeln Biquadrate der Wurzeln der erstern sind. Indessen kann allerdings auch das Gegentheil zutreffen.

§. 34.

So z. E. haben wir vorhin (§. 31.) gesehen, daß die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

mit

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ gesetzt, sich in

$$o = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1$$

verwandelt. Wird nun ferner auch diese mit

$$o = y^4 - 4y^3 + 10y^2 - 4y + 1$$

multiplicirt, und in dem Producte $y^2 = z$ gesetzt, so erhält man

$$o = z^4 + 6z^3 + 70z^2 + 6z + 1$$

eine Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x sind. Und hier findet sich gar keine Abwechselung der Zeichen ein.

§. 35.

Nach der bisher angeführten Methode, kann nun stuffenweise eine jede Gleichung in eine solche verwandelt werden, deren Wurzeln die 2^{nte} Dignität von den Wurzeln der ersten sind. Wir haben demnach noch zu sehen, wie man in Ansehung der übrigen Dignitäten, die in der Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 2c. nicht begriffen sind, zu verfahren habe. Wir werden die Methode nur in einem Beyspiele vortragen, woraus sich aber leicht wird abnehmen lassen, daß sie allgemein ist.

§. 36.

Es sey z. E. die Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

in eine solche

$$o = z^2 + \alpha x + \beta$$

zu verwandeln, so, daß die Wurzeln der letztern Cubi der Wurzeln der erstern seyn. Da demnach die letztere Gleichung wegen $z = x^3$, sich in

$$o = x^6 + \alpha x^3 + \beta$$

verwandelt, so sieht man leicht, daß die erstere

$$o = x^2 + ax + b$$

mit

$$o = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllll} o = x^6 & + Ax^5 & + Bx^4 & + Cx^3 & + Dx^2 & \\ & + a\,.. & + aA\,.. & + aB\,.. & + aC\,.. & + aDx \\ & & + b\,.. & + bA\,.. & + bB\,.. & + bC\,.. + bD \end{array}$$

das zweyte, dritte, fünfte und sechste Glied $= o$ gesetzt werden müsse, theils um die vier Coefficienten A, B, C, D zu bestimmen, theils auch, um die übrigen Glieder

$$\begin{array}{lll} o = x^6 & + Cx^3 & + bD \\ & + aB\,.. & \\ & + bA\,.. & \end{array}$$

mit der gesuchten Gleichung

$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

oder $\quad o = z^6 + \alpha x^3 + \beta$

zu vergleichen. Wir haben demnach, um der ersten Absicht Genügen zu thun,

$$o = A + a$$
$$o = B + aA + b$$
$$o = D + aC + bB$$
$$o = aD + bC$$

vier Gleichungen vom ersten Grade, aus denen man

$$\begin{aligned} A &= -a \\ B &= +aa - b \\ C &= ab \\ D &= bb \end{aligned}$$

erhält. Da nun nach der zweyten Absicht

$$\begin{aligned} \alpha &= C + aB + bA \\ \beta &= bD \end{aligned}$$

ist, so erhält man hiedurch die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^2 - 3abz &+ b^3 \\ + a^3 &\ldots \end{aligned}$$

deren Wurzeln die Cubi der Wurzeln von

$$0 = x^2 + ax + b$$

sind.

§. 37.

Es sey z. E.

$$0 = x^2 - 10x + 9$$

eine Gleichung, deren Wurzeln offenbar 1 und 9 sind; so ist

$$\begin{aligned} a &= -10 \\ b &= +9 \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab &= -1000 + 270 = -730 \\ b^3 &= 729 \end{aligned}$$

und

$$0 = z^2 - 730z + 729$$

eine Gleichung deren Wurzeln wiederum offenbar 1 und 729, folglich die Cubi von 1 und 9 sind.

§. 38.

§. 38.

Um noch ein Beyspiel anzubringen, so sey die cubische Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und diese solle in eine andere

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

verwandelt werden, so, daß die Wurzeln der letztern die Cubi der Wurzeln der erstern seyn. Da nun hier $z = x^3$ ist, so verwandelt sich die letztere Gleichung in

$$0 = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma.$$

Da diese vom neunten Grade ist, so muß die fürgegebene

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit einem Factor oder Gleichung vom sechsten Grade

$$\begin{aligned} 0 = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 &+ Dx^2 \\ + Ex + F & \end{aligned}$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllllll} 0 = x^9 & + Ax^8 & + Bx^7 & + Cx^6 & + Dx^5 & + Ex^4 & + Fx^3 & \\ & + a\ldots & + aA\ldots & + aB\ldots & + aC\ldots & + aD\ldots & + aE\ldots & + aFx^2 \\ & & + b\ldots & + bA\ldots & + bB\ldots & + bC\ldots & + bD\ldots & + bE\ldots + bFx \\ & & & + c\ldots & + cA\ldots & + cB\ldots & + cC\ldots & + cD\ldots + cE\ldots + cF \end{array}$$

das 2, 3, 5, 6, 8, 9te Glied $= 0$ gesetzt werden, um die Coefficienten A, B, C, D, E, F zu bestimmen, und sodann die übrigen Glieder

$$\begin{array}{llll} 0 = x^9 & + Cx^6 & + Fx^3 & + cF \\ & + aB\ldots & + aE\ldots & \\ & + bA\ldots & + bD\ldots & \\ & + C\ldots & + cC\ldots & \end{array}$$

 mit

mit

$$0 = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

zu vergleichen. Wir haben demnach

$$0 = A + a$$
$$0 = B + aA + b$$
$$0 = D + aC + bB + cA$$
$$0 = E + aD + bC + cB$$
$$0 = aF + bE + cD$$
$$0 = bF + cE$$

sechs Gleichungen vom ersten Grade, durch deren Auflösung man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = +2c - ab$$
$$D = +bb - ac$$
$$E = -cb$$
$$F = +cc$$

findet. Da nun ferner

$$\alpha = C + aB + bA + c$$
$$\beta = F + aE + bD + cC$$
$$\gamma = cF$$

ist, so haben wir nur noch die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F in diesen drey Gleichungen zu setzen, um die Coefficienten α, β, γ der gesuchten Gleichung

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

zu bestimmen, welche demnach folgende

$$\begin{array}{llll} 0 = z^3 & + 3cz^2 & + 3ccz & + c^3 \\ & - 3ab \,.\,. & - 3abc \,.\,. & \\ & + a^3 \,.\,. & + b^3 \,.\,. & \end{array}$$

seyn wird. Die Wurzeln dieser Gleichung sind demnach die Cubi der Wurzeln von der fürgegebenen

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

§. 39.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

deren Wurzeln 1, 2, 4 sind, so ist

$$a = -\ 7$$
$$b = +14$$
$$c = -\ 8$$

demnach

$$3c - 3ab + a^3 = -\ 73$$
$$3cc - 3abc + b^3 = +584$$
$$c^3 = -512$$

folglich die gesuchte Gleichung

$$0 = z^3 - 73z^2 + 584z - 512$$

deren Wurzeln 1, 8, 64, oder die Cubi von den Wurzeln 1, 2, 4 sind.

§. 40.

Wenn in der fürgegebenen Gleichung das zweyte Glied $= 0$, oder die Gleichung

$$0 = x^3 + bx + c$$

ist, so ist auch in der gefundenen Gleichung $a = 0$, und dieses macht dieselbe um ein merkliches einfacher, weil sie sodann schlechthin nur

$$\begin{array}{llll} 0 = z^3 & + 3cz^2 & + 3ccz & + c^3 \\ & & + b^3z & \end{array}$$

ist,

ist, und sich daher in

$$0=(z+c)^3+b^3z$$

verwandelt, welches, weil $z=x^3$ ist,

$$0=z+c+bx$$

und daher die Gleichung

$$0=x^3+c+bx,$$

oder $$0=x^3+bx+c$$

wieder herfürbringt.

§. 41.

Da wir hier

$$z=x^3$$

haben, so ist

$$0=x^3-z.$$

Diese Gleichung hat ausser der Wurzel

$$0=x-\sqrt[3]{z}$$

noch zwo andere

$$0=x+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1\pm\sqrt{-3})$$

welche folglich ebenfalls Wurzeln der Gleichung

$$0=x^9+\alpha x^6+\beta x^3+\gamma$$

sind. Da nun diese Gleichung durch die Multiplication der beyden Gleichungen

$$0=x^3+ax^2+bx+c$$

$$0=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

heraus gebracht worden, und die Wurzeln der erstern dieser Gleichungen

$$0=x-\sqrt[3]{z}$$

sind, so sind die Wurzeln der leztern Gleichung nothwendig

0 =

$$0=x+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1\pm\sqrt{-3}).$$

Wenn demnach entweder die Gleichung

$$0=x^3+ax^2+bx+c$$

oder die Gleichung

$$0=z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma$$

aufgelöst worden, so ist ebenfalls die Gleichung

$$0=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

oder, wenn wir für die Coefficienten ihre Werthe setzen,

$$0=x^6-ax^5+aax^4+2cx^3+bbx^4-cbx+cc$$
$$-bx^4-abx^3-acx^4$$

so gut als aufgelöst. Man hat sich aber darüber nicht zu verwundern: denn die Coefficienten dieser Gleichung werden sämtlich durch a, b, c bestimmt. Daher kann man nur drey, oder wenn man auch $x=v+k$, oder $x=x:k$ setzt, nur vier derselben willkührlich bestimmen. Die übrigen sind sodann durch diese zugleich mit bestimmt.

§. 42.

Wir können hier, ehe wir uns zu der Umkehrung dieser Aufgabe wenden, theils noch einer andern Methode Erwähnung thun, theils noch folgenden Lehrsatz anführen, welcher aus der bisher gebrauchten Methode fließt, und überhaupt so viel sagen will: wenn eine Gleichung

$$0=x^{mn}+\alpha x^{(m-1)n}+\beta x^{(m-2)n}+\gamma x^{(m-3)n}$$
$$+ \text{etc.}$$

durch

durch die Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

getheilt werden kann, und in ersterer $x^n = z$ gesetzt wird, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$0 = z^m + \alpha z^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

die n^{te} Dignität der Gleichung

$$0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

§. 43.

Die andere Methode, deren wir hier nur Erwähnung thun werden, gründet sich auf den Newtonschen Satz, welcher angiebt, wie man, vermittelst der Coefficienten einer Gleichung, nicht nur die Summe der Wurzeln, sondern auch die Summe von jeden Dignitäten derselben finden könne. Diese Summen werden durch $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$, $\int x^4$ ꝛc. angezeigt, so, daß $\int x^n$ die Summe der n^{ten} Dignitat aller Wurzeln der Gleichung anzeige. Die Gleichung sey

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

so ist

$$\begin{aligned} \int x &= a \\ \int x^2 &= a\int x - 2b \\ \int x^3 &= a\int x^2 - b\int x + 3c \\ \int x^4 &= a\int x^3 - b\int x^2 + c\int x - 4d \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Ferners, indem man $z = x^n$ setzt, sey wiederum die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \gamma z^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

so

so ist ebenfalls

$$\begin{aligned} \int z &= \alpha \\ \int z^2 &= \alpha\int z - 2\beta \\ \int z^3 &= \alpha\int z^2 - \beta\int z + 3\gamma \\ \int z^4 &= \alpha\int z^3 - \beta\int z^2 + \gamma\int z - 4\delta \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Da nun vermöge der Voraussetzung $z = x^n$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \int z &= \int x^n \\ \int z^2 &= \int x^{2n} \\ \int z^3 &= \int z^{3n} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Nun sind vermöge der erstern Gleichungen $\int x^n$, $\int x^{2n}$, $\int x^{3n}$ &c. durch a, b, c, d &c. gegeben, demnach hat man $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$ &c. und folglich lassen sich durch die letztern Gleichungen die Coefficienten α, β, γ, δ &c. und damit die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \text{\&c.}$$

finden, deren Wurzeln die n^{te} Dignität von den Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \text{\&c.}$$

seyn werden. Man sieht, ohne mein Erinnern, daß man dieses Verfahren weiter ausdehnen, und z. E.

$$\begin{aligned} \int z &= \int x^n + A\int x^p + B\int x^q + \text{\&c.} \\ \int z^2 &= \int x^{2n} + A^2\int x^{2p} + B^2\int x^{2q} + \text{\&c.} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

setzen kann.

§. 44.

§. 44.

Um nun auf die Umkehrung dieser Aufgaben zu kommen, so werden wir zu dem Beyspiele des §. 36. zurücke kehren. Wir haben daselbst gesehen, daß wenn die Quadratgleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

in

$$o = z^2 - 3abz + b^3 + a^3 z$$

verwandelt wird, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Es sey nun eine Quadratgleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

gegeben, und diese solle in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß dieser letztern Wurzeln Cubicwurzeln von denen der fürgegebenen Gleichung sind. Um dieses zu erhalten, so wird die Gleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

mit

$$o = z^2 - 3abz + b^3 + a^3 z$$

verglichen, um die Coefficienten a, b durch A und B zu bestimmen. Wir haben demnach

$$A = a^3 - 3ab$$
$$B = b^3$$

dieses giebt

$$b = \sqrt[3]{B}$$

und $o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$. welches

welches eine cubische Gleichung ist, durch deren Auflösung man a findet. Die gesuchte Gleichung ist sodann

$$o = x^2 + ax + b.$$

Man sieht leicht, daß sowohl b als a drey Werthe hat, und daß man daher anstatt einer Gleichung neune findet, die der Aufgabe Genügen leisten.

§. 45.

Wir werden uns aber damit nicht aufhalten, sondern diese an sich schon umgekehrte Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Es kann nemlich die letzte Gleichung

$$o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$$

mit jeder Cubicgleichung

$$o = a^3 + pa + q$$

deren zweytes Glied mangelt, verglichen werden. Thut man dieses, so erhält man

$$A = -q$$
$$B = -\tfrac{1}{27}p^3$$

Da nun

$$o = z^2 + Az + B$$

ist, so darf man nur die gefundenen Werthe von A, B in dieser Gleichung setzen, um

$$o = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$$

zu erhalten. Diese Gleichung aufgelöst, giebt die zwo Wurzeln

$$z = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}.$$

Nun ist $z = x^3$

demnach haben wir die zwo Wurzeln

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})}$$

Nun ist vermöge der Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

— a die Summe der beyden Wurzeln x, demnach haben wir

$$-a = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

welches die bekannte Cardanische Formel ist, die man nach den bisherigen Methoden, die Gleichung

$$0 = a^3 + pa + q$$

aufzulösen, findet. Man sieht zugleich, daß die beyden Glieder, aus denen sie besteht, Cubicwurzeln von den Wurzeln der Gleichung $0 = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$ sind.

§. 46.

Um das Beyspiel des §. 38. ebenfalls noch umzukehren; so haben wir daselbst gesehen, daß wenn man jede cubische Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

in

$$\begin{array}{llll} 0 = z^3 & + 3cz^2 & + 3ccz & + c^3 \\ & - 3ab.. & - 3abc... & \\ & + a^3.. & + b^3.. & \end{array}$$

verwandelt, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Ist nun von diesen Gleichungen die letztere

gegeben, so, daß man

$$0 = z^3 + Az^2 + Bz + C^3$$

hat, so läßt sich die erstere finden, und derselben Wurzeln werden sodann Cubicwurzeln der Wurzeln der fürgegebenen Gleichung seyn. Zu diesem Ende haben wir

$$\begin{aligned} A &= 3c - 3ab + a^3 \\ B &= 3cc - 3abc + b^3 \\ C^3 &= c^3 \end{aligned}$$

und hieraus findet sich für a folgende Gleichung

$$\begin{array}{l} 0 = a^9 + 3(3C - A)a^6 + 3(3C - A)^2 . a^3 + (3C - A)^3 \\ \quad - \quad 27\,C.\,a^6 - (B - AC).\,a^3 \end{array}$$

eine Gleichung vom neunten Grade, welche aber in eine cubische verwandelt wird, wenn man $a^3 = v$ setzt. Ist a durch die Auflösung dieser Gleichung gefunden, so hat man

$$b = \frac{3C - A + a^3}{3a}$$

und damit die Gleichung, die zu suchen war,

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

welche aber, weil A 9 Werthe, C aber 3 hat, auf 27 Arten verändert werden kann. Man sieht überhaupt aus diesen Beyspielen, daß man auf desto weitläuftigere Formeln verfällt, je höher die Dignitäten und Gleichungen sind, die man in einander zu verwandeln vornimmt.

§. 47.

Indessen wird es nicht undienlich seyn, hier noch anzuzeigen, daß sich die bisher gebrauchte Metho-

Methode ebenfalls auf andere Functionen der Wurzeln ausdehnen läßt. Man habe z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

und diese solle in eine andere

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

verwandelt werden, so, daß jede Wurzel der letztern eine Function der Wurzeln der erstern sey, die wir durch

$$z = x^2 + mx + n$$

ausdrücken wollen. Um dieses zu erhalten, so setze man erstlich diesen Werth von z in der zweyten Gleichung. Nun ist

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 2mx^3 + 2nx^2 \\ &\qquad\qquad + m^2x^2 + 2mnx + n^2 \\ +\alpha z &= \qquad\qquad + \alpha x^2 + m\alpha x + n\alpha \\ +\beta &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \beta \end{aligned}$$

Da diese Gleichung vom vierten Grade ist, so muß die erstere

$$0 = x^2 + ax + b$$

mit

$$0 = x^2 + Ax + B$$

multipliciret werden, um ebenfalls ein Product vom vierten Grade

$$\begin{aligned} 0 = x^4 + ax^3 &+ bx^2 \\ + Ax^3 &+ Aax^2 + Abx \\ &+ Bx^2 + Bax + Bb \end{aligned}$$

zu haben. Vergleicht man nun die Coefficienten, so haben wir

2 m

$$\begin{aligned} 2m &= A + a \\ 2n + \alpha + mm &= b + Aa + B \\ 2mn + m\alpha &= Ab + Ba \\ n^2 + n\alpha + \beta &= Bb \end{aligned}$$

vier Gleichungen, durch welche sich α, β, A, B bestimmen lassen. Werden demnach diese aufgelöst, so findet sich

$$\begin{aligned} A &= 2m - a \\ B &= m^2 + b - ma \\ \alpha &= ma - aa + 2b - 2n \\ \beta &= bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb \end{aligned}$$

und dadurch ist die Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

welche zu suchen war, bestimmt.

§. 48.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

in eine solche

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

zu verwandeln, so, daß die Wurzeln der letztern eine Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

der Wurzeln der erstern seyn. Hier haben wir demnach

$$\begin{aligned} a &= -10 \qquad & m &= +3 \\ b &= +16 & n &= +2 \end{aligned}$$

und hieraus finden sich die Werthe

$$\begin{aligned} A &= +16 \qquad & \alpha &= -102 \\ B &= +55 & \beta &= +1080 \end{aligned}$$

 dem-

demnach die gesuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

Die Probe ist leicht gemacht. Denn die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

sind $+2$ und $+8$. Wird jede derselben in der Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

gesetzt, so erhält man die beyden Werthe $z = 12$ und $z = 90$. Und eben dieses sind auch die Wurzeln der für z gefundenen Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

§. 49.

Will man diese Aufgabe umkehren, und aus der Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

finden, so müssen a, b durch α, β vermittelst der Gleichungen

$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

bestimmt werden. Man verfällt dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade, welche etwas weitläuftig ist. Ich werde sie nicht hersetzen, weil es hier bey der angezeigten Möglichkeit der Aufgabe sein bewenden haben kann.

§. 50.

§. 50.

Es läßt sich aber die Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Man kann nehmlich die Function

$$z = x^2 + mx + n$$

und in derselben besonders die beyden Coefficienten m, n zum Quæsito machen, und da wird der hiebey vorkommende Fall am schicklichsten in Form eines Satzes und einer Aufgabe zugleich vorgetragen. Der Satz ist folgender: **Wenn zwo Quadratgleichungen**

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

gegeben, so läßt sich, und zwar ohne die Gleichungen vorerst aufzulösen, die Wurzel der einen z als eine Function der Wurzel der andern ansehen, welche die rationale Form

$$z = x^2 + mx + n$$

hat. Die Aufgabe ist nun: **die Coefficienten m, n zu bestimmen.** Der Beweis und zugleich die Auflösung kömmt auf die (§. 47.) gefundene vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$nn + n\alpha + \beta = Bb$$

an. Werden aus diesen die beyden Grössen A, B, die wir nur, um die Aufgabe möglich zu machen, gebraucht haben, weggeschaft, so bleiben noch zwo Gleichungen für m und n, durch deren Auflösung

$$m = a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

$$n = b - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}.$$

gefunden, und damit die gesuchte Function

$$z = x^2 + mx + n$$

zugleich bestimmt wird.

§. 51.

Man setze z. E. wie vorhin die zwo Gleichungen

$$0 = x^2 - 10x + 16.$$
$$0 = z^2 - 102x + 1080.$$

so ist

$$a = -10 \qquad \alpha = -102$$
$$b = +16 \qquad \beta = +1080$$

Hieraus erhält man

$$\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = \sqrt{6084} = 78$$
$$\sqrt{(aa - 4b)} = \sqrt{36} = 6$$

demnach $m = -10 \pm 13$

$n = 16 + 51 \mp 65$

dieses giebt

den einen Werth von $m = +3$.
den correspondirenden von $n = +2$.
den andern Werth von $m = -23$.
den correspondirenden von $n = +132$.

demnach die beyden Functionen

$$z = xx + 3x + 2.$$
$$z = xx - 23x + 132.$$

Setzt man in jeder dieser Functionen die Werthe von x, welche 2 und 8 sind, so giebt jede die zween Werthe von z, nemlich 12 und 90. Demnach hat man die Wahl, welche von diesen Functionen man gebrauchen will. Solte man aber nur eine Wurzel von x wissen oder haben, oder dieselbe lieber gebrauchen wollen, so muß man sie in jeder von diesen zwo Functionen setzen, um die beyden Werthe von z zu erhalten.

§. 52.

Endlich kann die Aufgabe, wiewohl auf eine unbestimmtere Art, noch dergestalt umgekehrt werden, daß, wenn nur die Function

$$z = xx + mx + n$$

gegeben, zwo Gleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = zz + \alpha z + \beta$$

zu finden seyn, deren die erste x, die andere z besonders enthalte. Diese Aufgabe ist an sich unbestimmt, und dient daher fürnemlich nur, wenn in der fürgegebenen Function z und x als veränderlich angesehen werden. Denn hier sind die vier Coefficienten a, b, α, β vermittelst der vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

zu suchen; demnach müssen A, B, als willkührliche Grössen beybehalten werden, und man findet

$a = 2m - A$

$b = B - mA + mm$

$\alpha = AA + mA + 2B - 2n$

$\beta = BB - mAB + m^2 B + n^2 - mnA$
$\quad - 2nB + nAA.$

Da nun nur m und n gegeben sind, so können A, B willkührlich angenommen werden, und die Gleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = zz + \alpha z + \beta$$

werden immer der Function

$$z = xx + mx + n$$

ein Genügen thun; das will sagen, man wird aus der ersten dieser Gleichungen zwo Wurzeln x finden, welche den aus der zweyten gefundenen Wurzeln z entsprechen, und dieses geht nicht nur durch alle mögliche, sondern auch durch alle unmögliche Werthe von x und z.

§. 53.

Was bisher (§. 47. seqq.) von den Verhältnissen der beyden Quadratgleichungen

$$o = x^2 + ax + b$$
$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

und der Function

$$z = x^2 + mx + n$$

gesagt worden, ist in Absicht auf die dabey gebrauchte

gebrauchte Methode viel allgemeiner, weil es sich auf jede Gleichungen und rationale Functionen erstreckt. Alles dabey zielet überhaupt dahin, daß **man mit den Wurzeln der Gleichungen, ohne diese vorerst aufzulösen, jede Veränderungen vornehmen könne.** Und in diesem Stücke ist man in der Algebra noch zurücke geblieben, wie man es schon aus den bisher angeführten Beyspielen ersehen kann, welche ungleich weiter gehen, als wenn man nur $x + a$, $x - a$, ax, $x : a$ anstatt der Wurzel x setzt. Indessen hat man besonders mit den trigonometrischen Formeln Verwandlungen vorgenommen, welche denen, die wir hier für jede Gleichungen vorschlagen, sehr ähnlich sind, und an sich betrachtet, schwerer zu seyn scheinen, weil die Circulbögen, in Absicht auf die Sinus und Tangenten, transcendente Grössen sind.

§. 54.

Um aber dennoch auch, in Absicht auf jede Gleichungen, hierin den Weg gebähnt zu machen, so werden wir bey folgender Aufgabe anfangen. **Es seyn zwo Gleichungen**

$$o = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$
$$o = y^n - \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

gegeben, und es solle, ohne diese vorerst aufzulösen, eine dritte Gleichung

$$o = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + Bz^{\lambda-2} - Cz^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

daraus hergeleitet werden, so, daß jede

Wur-

Wurzel z die Summe zwoer Wurzeln $x + y$ sey.

§. 55.

Ehe wir die Auflösung dieser Aufgabe hersetzen, werden wir einige Anmerkungen darüber voraus schicken. Einmal sieht man leicht, daß, wenn auch die Analysis so weit gebracht wäre, daß man die beyden ersten Gleichungen auflösen könnte, die dritte dennoch nicht wohl anders als durch eine weitläuftige Rechnung daraus würde hergeleitet werden, besonders in allen den Fällen, wo die Wurzeln irrational wären. Denn da würden nachgehends, wie wir bald sehen werden, diese irrationalen Grössen sämtlich wieder aus der Rechnung wegfallen, weil, wenn die Coefficienten a, b, c, d etc. α, β, γ, δ etc. rational sind, die Coefficienten A, B, C, D etc. es nothwendig auch sind.

§. 56.

Sodann tragen wir hier die Aufgabe aufs allgemeinste vor. Wir nehmen in der dritten Gleichung so viele Wurzeln z an, als heraus kommen müssen, wenn jede Wurzel x zu jeder Wurzel y besonders addirt wird. Wenn demnach die Anzahl der Wurzeln der ersten Gleichung $= m$, der andern $= n$ ist, so ist die Anzahl der Wurzeln, so die dritte Gleichung haben wird $= mn$, und dieses bestimmt den Exponenten $\lambda = mn$. Diese Anzahl kann

kann alsdann vermindert werden, wenn in der ersten oder andern Gleichung, oder auch in beyden, etliche Wurzeln gleich sind. Man muß dieses aber voraus wissen, oder aus den Umständen schliessen können. Wir setzen hier alle Wurzeln ungleich, und um eine Einförmigkeit in der Rechnung beyzubehalten, alle positiv, weil, wenn in besondern Fällen einige, oder alle negativ sind, die Aenderung der Zeichen sich darnach einrichten läßt.

§. 57.

Diese so absolute Allgemeinheit trägt viel dazu bey, daß wir die Auflösung der Aufgabe einfacher machen, und auf ihre allgemeinste Gesetze bringen können. Und dazu werden uns die oben (§. 43.) angeführten Formeln von der Summe der Dignitäten der Wurzeln jeder Gleichung dienen können. Denn da hier die Coefficienten der beyden ersten Gleichungen gegeben sind, so sind, vermittelst dieser Formeln, auch die Summen von jeden Dignitäten ihrer Wurzeln gegeben. Es ist demnach nur die Frage, wie aus diesen Summen die Summen jeder Dignitäten der Wurzeln der dritten Gleichung gefunden werden können; das will sagen, wie sich aus $\int x^n$ und $\int y^n$ die Summe $\int (x+y)^n = \int z^n$ herleiten lasse. Denn sind diese gefunden, so dienen die vorbemeldeten Formeln (§. 43.) ebenfalls wiederum, um die gesuchten Coefficienten A, B, C &c. daraus zu bestimmen.

§. 58.

§. 58.

Man setze zu diesem Ende, P, Q, R &c. seyn die Wurzeln der ersten Gleichung; p, q, r &c. die Wurzeln der zweyten; so werden

$$\begin{array}{llll} P+p & Q+p & R+p & \text{\&c.} \\ P+q & Q+q & R+q & \\ P+r & Q+r & R+r & \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} & \end{array}$$

die Wurzeln der dritten seyn. Nun findet sich jede Dignität k dieser Wurzeln, vermittelst des **Newtonschen** Binomialsatzes. Es ist nemlich

$$(P+p)^k = P^k + k.P^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.P^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

$$(Q+p)^k = Q^k + k.Q^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.Q^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

$$(R+p)^k = R^k + k.R^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.R^{k-2}p^2 + \text{\&c.} \ldots + p^k$$

&c.

Da man eben so viele Reihen für q, r, s &c. findet, als für p; so erhellt überhaupt hieraus folgendes:

1°. Wenn alle diese Dignitäten zusammen addirt werden, so erhält man so viele

P^k, Q^k, R^k &c.

als Wurzeln p, q, r &c. sind. Da nun die Anzahl dieser Wurzeln $= n$ ist, so ist die Summe von allen

$= n(P^k + Q^k + R^k + \text{\&c.}) = n\int x^k$.

2°. Auf gleiche Art erhält man so viele p^k, q^k, r^k &c. als Wurzeln P, Q, R &c. sind. Demnach ist die Summe von allen

$= m(p^k + q^k + r^k + \text{\&c.}) = m\int y^k$.

3°. Dieses sind demnach die Summen der ersten und letzten Glieder aller Reihen. Die Summen der darauf folgenden ersten, zweyten, dritten ... w^{ten} Glieder, lassen sich auf eine allgemeine Formel bringen. Denn da sie einerley Coefficienten haben, so sind die w^{ten} Glieder, mit Weglassung des Coefficienten,

$$P^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \text{\&c.})$$
$$Q^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \text{\&c.})$$
$$R^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \text{\&c.})$$

&c.

daher ihre Summe

$$= \int x^{k-w}.\int y^w.$$

4°. Wird demnach in dieser Formel, der Ordnung nach, für w, 1, 2, 3, 4 ꝛc. gesetzt, so erhält man

$$\int(x+y)^k = \int z^k = n\int x^k + k\int x^{k-1}.\int y + k.\frac{k-1}{2}.\int x^{k-2}\int y^2 + k.\frac{k-1}{2}.\frac{k-2}{3}.\int x^{k-3}.\int y^3 + \text{\&c.}$$

welches die gesuchte Formel ist.

§. 59.

§. 59.

Diese Formel scheint in dem ersten und letzten Gliede einen besondern Coefficienten zu haben. Es läßt sich aber derselbe auch dadurch herleiten, daß

$$n = \int y^0$$
$$m = \int x^0$$

ist. Denn $\int y^0$ will sagen, so viele Einheiten als die zweyte Gleichung Wurzeln hat, und $\int x^0$ so viele Einheiten, als Wurzeln der ersten Gleichung sind. Und damit bringen diese beyde Coefficienten keine Anomalie in die Formel. Diese Formel ist übrigens der Newtonschen in allem ähnlich, und unterscheidet sich nur darin, daß, anstatt daß in der Newtonschen, um eine Dignität heraus zu bringen, nur Dignitäten mit einander multiplicirt werden, in dieser ganzen Summen von Dignitäten mit einander multiplicirt werden mussen, und dadurch aber auch eine Summe von Dignitäten heraus gebracht wird, deren jede ein Binomium ist.

§. 60.

Setzen wir nun in dieser Formel für k der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. und bemerken dabey, daß wo ein Exponent von x, $= 0$ wird, man $\int x^0 = m$ setzen müsse, so haben wir

$$\int z = n\int x + m\int y$$
$$\int z^2 = n\int x^2 + 2\int x.\int y + m\int y^2$$
$$\int z^3 = n\int x^3 + 3\int x^2.\int y + 3\int x.\int y^2 + m\int y^3$$
$$\int z^4 = n\int x^4 + 4\int x^3.\int y + 6\int x^2.\int y^2 + 4\int x\int y^3 + m\int y^4 \ \&c.$$

§. 61.

Um nun dieses Verfahren durch das einfachste Beyspiel zu erläutern, so seyn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und es solle eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln $z = x + y$ sind. Diese Gleichung ist nun (§. 56.)

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

weil die Summe der Exponenten $n + m = 2 + 2 = 4 = \lambda$ ist. Nun ist vermöge der Formel des §. 43.

$$\int x = a \qquad \int y = \alpha$$
$$\int x^2 = a^2 - 2b \qquad \int y^2 = \alpha^2 - 2\beta$$
$$\int x^3 = a^3 - 3ab \qquad \int y^3 = \alpha^3 - 3\beta\alpha$$
$$\int x^4 = a^4 - 4a^2b + 2bb \qquad \int y^4 = \alpha^4 - 4\beta\alpha^2 + 2\beta\beta$$

folglich

$$\int z = 2(a + \alpha)$$
$$\int z^2 = 2a^2 - 4b + 2\alpha^2 - 4\beta + 2a\alpha$$
$$\int z^3 = 2a^3 - 6ab + 2\alpha^3 - 6\alpha\beta + 3\alpha a^2 - 6\alpha b + 3a\alpha^2 - 6a\beta$$
$$\int z^4 = 2a^4 - 8ab + 4bb + 2\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 4\beta\beta + 4a^3\alpha - 12ab\alpha + 4\alpha^3a - 12\alpha\beta a + 6a^2\alpha^2 - 12a^2\beta - 12\alpha^2b + 24b\beta$$

Da nun (§. 43.)

$$A = fz$$
$$2B = Afz - fz^2$$
$$3C = fz^3 - Afz^2 + Bfz$$
$$4D = Afz^3 - Bfz^2 + Cfz - fz^4$$

ist, so findet sich, wenn man die Werthe von fz, fz^2, fz^3, fz^4 in diesen Formeln setzt, und die Reduction vornimmt

$$A = 2(a+\alpha)$$
$$B = (a+\alpha)^2 + (a\alpha + 2b + 2\beta)$$
$$C = (a\alpha + 2b + 2\beta).(a+\alpha)$$
$$D = (a\beta + \alpha b).(a+\alpha) + (\beta - b)^2$$

und damit ist die gesuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmt, und gefunden, deren Wurzeln z die Summe $x + y$ der Wurzeln der Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha x + \beta$$

sind.

§. 62.

Will man anstatt $z = x + y$, die Differenz $z = x - y$ haben, so darf man nur in der zweyten Gleichung α negativ nehmen, weil dieses die Wurzeln y verneinend macht.

§. 63.

Solle aber

$$z = \pi x + \varrho y$$

seyn; so müssen beyde Gleichungen vorerst in solche verwandelt werden, deren Wurzeln $\xi = \pi x$, und $\eta = \varrho y$ sind. Man wird demnach

$$0 = \xi^2 - a\pi\xi + b\pi^2$$
$$0 = \eta^2 - \alpha\varrho\eta + \beta\varrho^2$$

haben, und in den vier Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt worden, $a\pi$ anstatt a, und $\alpha\varrho$ anstatt α setzen müssen, um die gesuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

heraus zu bringen.

§. 64.

Solle aber

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn, so müssen einige Verwandlungen mehr vorgehen. Man macht nemlich nach den oben gegebenen Methoden aus

$$0 = x^2 - ax + b$$

eine Gleichung

$$0 = \xi^2 + 2b\xi + bb \atop - aa\xi$$

deren Wurzeln $\xi = xx$, oder Quadrate von x sind. Sodann setzt man $\pi xx = \pi\xi = \zeta$, um dadurch

$$0 = \zeta^2 + 2\pi b\zeta + bb\pi\pi \atop - aa\pi\zeta$$

zu erhalten. Endlich setzt man $\zeta + \tau = v$, und so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = v^2 &- 2\tau v + \tau\tau \\ &+ 2\pi b v - 2\pi b\tau \\ &- aa\pi v + aa\pi\tau \\ &+ bb\pi\pi \end{aligned}$$

Ferners verwandelt man die zweyte Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

nach der oben angegebenen Methode (§. 36.) in

$$\begin{aligned} 0 = \eta^2 &- 3\alpha\beta\eta + \beta^3 \\ &+ \alpha^3\eta \end{aligned}$$

deren Wurzeln $\eta = y^3$, oder Cubi von y sind. Sodann setzt man $\varrho\eta = \varrho y^3 = \sigma$, und erhält dadurch

$$\begin{aligned} 0 = \sigma^2 &- 3\alpha\beta\varrho\sigma + \beta^3\varrho^2 \\ &+ \alpha^3\varrho\sigma \end{aligned}$$

Da man auf diese Art endlich $z = v + \sigma$ hat, so darf man nur in den 4 Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt werden (§. 60.)

$-2\tau + 2\pi b - aa\pi$ anstatt a

$\tau\tau - 2\pi b\tau + aa\pi\tau + b^2\pi^2$ anstatt b

und

$-3\alpha\beta\varrho + \alpha^3\varrho$ anstatt α

$\beta^3\varrho^2$ anstatt β

setzen, um dadurch die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu bestimmen, deren Wurzeln sodann

$$z = v + \sigma = \zeta + \tau + \sigma = \pi\xi + \tau + \varrho\eta = \pi x^2 + \tau + \varrho y^3$$

folglich

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn werden.

§. 65.

Man kann auf eine ähnliche Art

$$\begin{aligned} z = Mx^k &+ Nx^h + \&c. \\ &+ Px^k + Qy^\lambda + \&c. \\ &+ R \end{aligned}$$

setzen, und die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

aus den beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

ohne diese vorerst aufzulösen, heraus bringen. Denn diese beyden Gleichungen lassen sich nach der Regel des §. 47 in zwo andere

$$0 = \xi^2 - a'\xi + b'$$
$$0 = \eta^2 - \alpha'\eta + \beta'$$

dergestalt verwandeln, daß

$$\xi = Mx^k + Nx^h + \&c. + R$$

und

$$\eta = Py^k + Qy^\lambda + \&c.$$

sey, und so hat man sodann

$$z = \xi + \eta,$$

wodurch sich die Coefficienten in der gesuchten Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmen lassen.

§. 66.

Wir werden nun aber sehen, wie die Rechnung ausfällt, wenn z nicht die Summe $x + y$, son-

sondern das Product xy ist. Es sey demnach wiederum, wie §. 54.

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$0 = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

so ist (§. 54. 56.)

$$0 = z^{mn} - Az^{mn-1} + Bz^{mn-2} - Cz^{mn-3} + \text{ꝛc.}$$

Es seyn ebenfalls, wie (§. 58.) P, Q, R &c. die Wurzeln der ersten Gleichung, p, q, r &c. die Wurzeln der andern; so sind, weil $z = xy$ seyn solle, die Wurzeln der dritten

$$\begin{array}{lll} Pp & Qp & Rp \;\&c. \\ Pq & Qq & Rq \\ Pr & Qr & Rr \\ \&c. & \&c. & \&c. \end{array}$$

Da dieses nun keine Binomia sind, so gebrauchen wir den Newtonschen Lehrsatz nicht, sondern es ist überhaupt

$$\begin{aligned} \int z^k = {} & + P^k p^k + Q^k p^k + R^k p^k \;\&c. \\ & + P^k q^k + Q^k q^k + R^k q^k \\ & + P^k r^k + Q^k r^k + R^k r^k \\ & \;\&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

das will sagen,

$$\int z^k = \int y^k (P^k + Q^k + R^k + \&c.) = \int y^k . \int x^k$$

folglich, wenn man der Ordnung nach $k = 1, 2, 3, 4$ ꝛc. setzt,

$$\begin{aligned} \int z &= \int x . \int y \\ \int z^2 &= \int x^2 . \int y^2 \\ \int z^3 &= \int x^3 . \int y^3 \\ &\&c. \end{aligned}$$

und

und hieraus vermöge der Formeln des §. 43.

$$\begin{aligned} +\; A &= \int x \int y \\ -2B &= \int x^2 . \int y^2 - A \int x . \int y \\ +3C &= \int x^3 . \int y^3 - A \int x^2 . \int y^2 + B \int x . \int y \\ -4D &= \int x^4 . \int y^4 - A . \int x^3 . \int y^3 + B \int x^2 . \int y^2 \\ & \quad - C \int x . \int y . \\ &\&c. \end{aligned}$$

Da nun $\int x, \int x^2, \int x^3$ &c. $\int y, \int y^2, \int y^3$ &c. durch a, b, c &c. α, β, γ &c. gegeben sind, (§. 43.) so hat man vermittelst dieser Formeln auch A, B, C, D &c. und damit die gesuchte Gleichung

$$0 = z^{mn} - Az^{mn-1} + Bz^{mn-2} - \&c.$$

deren Wurzeln $z = xy$ seyn werden. Man sieht zugleich aus diesem Beweise, daß

A durch a, α
B durch a, α, b, β
C durch $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$
&c.

bestimmt wird, so viel auch die fürgegebenen beyden Gleichungen Glieder und Coefficienten haben mögen.

§. 67.

Ungeachtet übrigens die Beweise, so wir sowohl für $z = x + y$, als für $z = xy$ gegeben haben, bey ihrer Allgemeinheit noch sehr einfach sind, so verfällt man dennoch in weitläuftige Rechnungen, wenn man sie in besondern Fällen entwickeln, und die Coefficienten A, B, C, D &c. nicht durch $\int x, \int x^2$ &c. $\int y, \int y^2$ &c.

Q 4 son-

sondern durch a, b, c &c. α, β, γ &c. ausdrücken will, dafern diese nicht in Zahlen gegeben sind. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, wodurch diese Weitläuftigkeit in besondern Fallen abgekürzt werden kann. Es seyn z. E. zwo Quadratgleichnungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und eine dritte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu finden, so, daß $z = xy$ sey. Man setze

$$x = z : y$$

in die erste Gleichung

$$0 = x^2 - ax + b$$

so verwandelt sich diese in

$$0 = z^2 - azy + by^2$$

Nun giebt die zweyte Gleichung mit b multiplicirt

$$0 = by^2 - \alpha by + \beta b$$

wird diese abgezogen, so bleibt

$$0 = z^2 - b\beta + (\alpha b - az)y$$

demnach

$$y = (b\beta - z^2) : (\alpha b - az)$$

Dieser Werth von y in der Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gesetzt, und die Reduction vorgenommen, giebt die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^4 - a\alpha z^3 &+ a^2\beta z^2 - a\alpha b\beta z + b^2\beta^2 \\ &+ \alpha^2 b\,.. \\ &- 2b\beta\,.. \end{aligned}$$

deren Wurzeln $z = xy$ sind.

§. 68.

Solte aber z nicht das Product xy, sondern der Quotient $x:y$, oder ein Product aus $x^m y^n$ seyn, so gelangt man besser zum Ziele, wenn man vorerst die beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

in zwo andern Quadratgleichungen verwandelt, deren Wurzeln

$$\xi = x^m$$
$$\eta = y^n$$

sind, welches nach den oben angegebenen Methoden geschieht. Denn so erhält man

$$z = \xi\eta$$
$$0 = \xi^2 - G\xi + H$$
$$0 = \eta^2 - K\eta + L$$

und folglich die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^4 - GKz^3 &+ G^2Lz^2 - GHKLz + H^2L^2 \\ &+ K^2Hz^2 \\ &- 2HLz^2 \end{aligned}$$

welche immer eine Biquadratgleichung seyn wird, so groß auch die Exponenten m, n seyn mögen.

IX.

Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradlinichte Vielecke, welche um dieselben und in denselben beschrieben werden können.

§. 1.

Tab. III. Archimedes ist der erste gewesen, welcher sich, da die Quadratur und Rectification des Circuls nicht genau gefunden noch durch Zahlen ausgedrucket werden konnte, in Sinn kommen liesse, diese beyden Grössen, vermittelst der um den Circul und in denselben beschriebenen Vielecke dergestalt zu bestimmen, daß er die Schranken angeben könnte, zwischen welchen sie fiele. Die durchaus gleichförmige Krümmung des Circuls machte, daß man die sogenannten regulären Vielecke dazu gebrauchen konnte, bey welchen sich von einer Seite auf den ganzen Umkreis schliessen liesse; und einige geometrische Lehrsätze verhalfen dazu, daß man durch fortgesetztes Halbiren aus jedem angenommenen Vielecke andere von 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. mal mehr Seiten berechnen konnte.

§. 2.

§. 2.

Diese Schicklichkeiten fallen bey jeden andern krummen Linien gröstentheils weg. Es lassen sich zwar um und in denselben geradlinichte Vielecke beschreiben, dabey aber werden, wenn man die Seiten gleich macht, die Winkel ungleich, und hinwiederum erhält man bey gleichen Winkeln ungleiche Seiten; dieses macht, daß sich nicht so unbedingt von jeder Seite auf den ganzen Umkreis des Vieleckes schliessen läßt. Ueberdies läßt sich auch nicht so leicht bestimmen, wie wenn das Vieleck um die Linie gezogen oder angenommen worden, daß demselben entsprechende Vieleck in derselben müsse gezogen werden, weil sich, wenn man nicht zwo oder mehr Bedingungen zugleich annimmt, unzählige ziehen lassen, die sämtlich einander unähnlich sind. Hingegen ist bey dem Circul die Anzahl der Seiten, und die Bedingung, daß sie einander gleich seyn sollen völlig zureichend.

§. 3.

Da demnach bey der Ziehung der Vielecke um jede andere krumme Linien, die nicht Circul sind, viel willkührliches bleibt, so werden wir bey dem anfangen, was für sich am einfachsten, und besonders in der Ausübung am leichtesten ist. Und hier bieten sich sogleich zween Fälle an. Denn hat man nach beliebigen Regeln ein Vieleck in eine krumme Linie beschrie-

beschrieben, so ist unter allen Vielecken, die von gleichvielen Seiten um dasselbe beschrieben werden können, dasjenige das gleichförmigste und regulärste, dessen Seiten mit den Seiten des inner der krummen Linie gezogenen Parallel sind. Die Regularität wird grösser und zu den vorhabenden Absichten bequemer, wenn man die Winkel gleich macht, welche jede zwo Seiten des Vieleckes mit einander machen.

§. 4.

Fig. I. So z. E. sey AMNB eine halbe Ellipse. Solte in und um dieselbe ein Sechseck beschrieben werden, so macht man den Winkel MAB = 60 Gr. und zieht AM. Sodann wird AMN = MNB = 120 Gr. gemacht, und MN, NB gezogen, so ist AMNB die Hälfte des Sechseckes in der Ellipse. Ferner zieht man die Tangente am, mn, nb mit AM, MN, NB parallel, und so ist amnb die Hälfte des Sechseckes um die Ellipse. Diese Art die Vielecke in und um eine krumme Linie zu zeichnen, hat in Absicht auf die Ausübung etwas sehr leichtes und einfaches, weil sich dabey die Durchschnittspuncten M, N, B, m, n, b von selbst ergeben, und weil es sehr leicht ist, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehen, welche mit der Chorde derselben parallel seyn.

§. 5.

Es verschwindet aber diese Leichtigkeit größtentheils, wenn man bey dem äussern Vielecke anfängt, und sodann das Innere nach demselben ziehen will, weil sich die Puncte A, M, N, B nicht eben so leicht durch die Puncten a, m, n, b bestimmen lassen. Mit der Bedingung, daß die innern Seiten den äussern parallel seyn sollen, reicht man nicht aus, weil sich unter dieser Bedingung unzählige Vielecke ziehen lassen, in dem man z. E. den Punct M auf dem ganzen Bogen $\mu\nu$, der zwischen den Berührungspuncten μ, ν liegt, annehmen kann, wo man will. Geht man aber von der Bedingung der parallelen Lage beyder Vielecke ab, so ist der einfachste und kenntlichste Fall derjenige, wo, nachdem das äussere Vieleck gezogen worden, das Innere in die Berührungspuncten μ, ν, σ falle. Auf diese Art stellt $\alpha\mu\nu\sigma\gamma$ die Hälfte des Sechseckes vor. Die Bestimmung der Berührungspuncte ist es nun, was hiebey die meiste Schwürigkeit verursacht. Hingegen hat diese letztere Art der Verzeichnung beyder Vielecke den Vortheil, daß sich dabey einzelne Stücke der krummen Linie, dergleichen $\mu M\nu$ ist, besonders betrachten, und mit dem Triangel $\mu m\nu$ vergleichen lassen. Ueberdies ist der Winkel $Em a$ das Maaß der Krümmung des Bogens $\mu M\nu$, weil derselben in μ die Richtung μm, in ν die Richtung νm hat. Werden aus μ, ν parallele Ordinaten $\mu\alpha$, νC auf AB gezogen, so findet sich

$$Em\mu = m\nu C - a\mu\alpha.$$

Denn

Denn es ist

$$Em\mu = m\mu\nu + m\nu\mu$$
$$180^\circ = \alpha\mu\nu + m\nu C$$

demnach

$$Em\mu + 180 = \alpha\mu m + m\nu C$$
$$Em\mu = \alpha\mu m - 180 + m\nu C = m\nu C - \alpha\mu\alpha$$

Da nun die Winkel $a\mu\alpha$, $m\nu C$ durch die Differentialien der Abscissen und Ordinaten leicht bestimmt werden, so läßt sich auch die krumme Linie leicht in solche Theile theilen, die einerley Krümmung haben, oder wobey die Poligonalwinkel $\mu m\nu$ sämtlich gleich werden.

§. 6.

Um nun zu sehen, was hieraus zum Behuf der Rectification der krummen Linien kann gefunden werden, so werden wir einen Triangel, dergleichen $\mu\ m\ \nu$ ist, besonders vornehmen, und denselben auf das allgemeinste betrachten.

Fig. II. Es sey demnach AM ein Stück einer krummen Linie, AT die Tangente des Puncts A, und TM die Tangente des Puncts M, AM die Chorde. Man verlängere AT in P und fälle auf AP die Linie MP senkrecht, so, daß AP als eine Abscisse, PM als eine Ordinate angesehen werde, und TP die dem Punct M zugehörige Subtangente sey. Man setze

$$AP = x$$
$$PM = y$$

so ist

die

die Chorde $AM = \surd(xx + yy)$
$$PT = ydx : dy$$
$$AT = x - ydx : dy$$
und der Bogen $AM = \int \surd(dx^2 + dy^2)$

die Tangente $TM = y\surd\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)$

§. 7.

Werden in diesen Formeln die Wurzelgrößen nach der **Newtonschen** Binomialformel aufgelöst, so ist

$$TM = y\left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{2dx} - \frac{dy^3}{2.4dx^3} + \frac{1.3.dy^5}{2.4.6dx^5} - \text{etc.}\right)$$

demnach

$$AT + TM = x + \frac{ydy}{2dx} - \frac{y.dy^3}{2.4.dx^3} + \frac{3y.dy^5}{2.4.6.dx^5} - \text{etc.}$$

ferner die Chorde

$$AM = x + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{2.4.x^3} + \frac{1.3.y^6}{2.4.6.x^5} - \text{etc.}$$

und der Bogen

$$AM = x + \tfrac{1}{2}\int\frac{dy^2}{dx} - \frac{1}{2.4}\int\frac{dy^4}{dx^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\int\frac{dy^6}{dx^5} - \text{etc.}$$

Da nun hiebey

$$dy : dx = \text{tang. } MTP$$

ist, so sind alle diese Reihen destomehr convergirend, je kleiner die Krümmung des Bogens AM ist.

§. 8.

Nun läßt sich die Verhältniß zwischen y und x überhaupt durch die Reihe

y =

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + \text{rc.}$$

ausdrücken. Ich sage überhaupt und ohne Rücksicht auf gewisse Puncte einiger krummen Linien, wo statt ganzer Exponenten gebrochene zum Vorschein kommen, oder wo einige der ersten Glieder dieser Reihe $= 0$ werden. Man setze A wäre ein solcher Punct, so darf man nur anstatt aus der Tangente AP die Abscissenlinie zu machen, die Abcissen auf MT nehmen, und man wird die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \&c.$$

immer ganz erhalten. In dieser Reihe bleiben nemlich die beyden ersten Glieder, welche sonst

$$A + Bx$$

seyn würden, weg, weil y zugleich mit $x = 0$ wird, und weil Bx nur vorkömmt, wo die Abscissenlinie die krumme Linie unter einem Winkel schneidet, deren Tangente $= B$ ist.

§. 9.

Wenn wir demnach die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

als die allgemeinste Gleichung zwischen y und x annehmen, so ist

$$dy = dx(2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4 + \text{rc.})$$

Werden nun diese Werthe in den erst gefundenen Reihen (§. 7.) gesetzt, und die für den Bogen AM angezeigten Integrationen vorgenommen,

so erhält man den Bogen AM $= x +$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}a^2x^3 + \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{8}{5}acx^5 + \tfrac{5}{3}adx^6 + \tfrac{12}{7}aex^7 + \text{rc.}\\
&\qquad + \tfrac{9}{10}bb \ldots + 2bc \ldots + \tfrac{15}{7}bd \ldots\\
&\qquad - \tfrac{2}{5}a^4 \ldots - 2a^3b \ldots + \tfrac{8}{7}cc \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{18}{7}a^3c \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{27}{7}a^2b^2 \ldots\\
&\qquad\qquad + \tfrac{4}{7}a^6 \ldots
\end{aligned}$$

die Chorde AM $= x +$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}a^2x^3 + abx^4 + acx^5 + adx^6 + aex^7 + \text{rc.}\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}bb \ldots + bc \ldots + bd \ldots\\
&\qquad - \tfrac{1}{8}a^4 \ldots - \tfrac{1}{2}a^3b \ldots + \tfrac{1}{2}cc \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{2}a^3c \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{3}{4}b^2a^2 \ldots\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{16}a^6 \ldots
\end{aligned}$$

Ferners die Summe der Tangenten AT + TM $=$

$$\begin{aligned}
&x + a^2x^3 + \tfrac{5}{2}abx^4 + 3acx^5 + \tfrac{7}{2}adx^6 + 4aex^7\\
&\qquad - a^4 \ldots - \tfrac{11}{2}a^3b \ldots - 7a^3c \ldots\\
&\qquad + \tfrac{3}{2}b^2 \ldots + \tfrac{7}{2}bc \ldots - \tfrac{45}{4}a^2b^2 \ldots\\
&\qquad\qquad + 4bd \ldots\\
&\qquad\qquad + 2cc \ldots\\
&\qquad\qquad + 2a^6 \ldots
\end{aligned}$$

§. 10.

Vergleicht man nun diese drey Reihen mit einander, so finden sich die Coefficienten a, b, c, d &c. in allen auf einerley Art verwickelt, und der Unterschied besteht nur in den Zahlen, womit sie in jeder Reihe besonders multiplicirt sind. Diese Zahlen finden sich nun aber so beschaffen, daß, wenn man $\frac{1}{3}$ (AT + TM) zu

$\frac{2}{3}$ von der Chorde addirt, man eine Reihe

$$\frac{AT+TM+2AM}{3} = x + \frac{2}{3}a^2x^3 + \begin{array}{l} \frac{3}{2}abx^4 + \frac{5}{3}acx^5 + \frac{11}{6}adx^6 + 2aex^7 + \text{etc.} \\ \qquad\quad + \frac{5}{6}bb \ldots + \frac{11}{6}bc \ldots + 2bd \ldots \\ \qquad\quad - \frac{5}{12}a^4 \ldots - \frac{13}{6}a^3b \ldots + cc \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{8}{3}a^3c \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{17}{4}a^2b^2 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{17}{24}a^6 \ldots \end{array}$$

erhält, deren drey ersten Glieder mit der für den Bogen AM gefundenen Reihe übereintreffen, und welche folglich nur um $\frac{AT+TM+2AM}{3} -$

$$AmM = \begin{array}{l} + \frac{1}{15}acx^5 + \frac{1}{6}adx^6 + \frac{2}{7}aex^7 + \text{etc.} \\ - \frac{1}{15}bb \ldots - \frac{1}{6}bc \ldots - \frac{1}{7}bd \ldots \\ - \frac{1}{60}a^4 \ldots - \frac{1}{6}a^3b \ldots - \frac{1}{7}cc \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{2}{21}a^3c \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{11}{28}b^2a^2 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{23}{168}a^6 \ldots \end{array}$$

grösser ist, als der Bogen. Da dieser Unterschied erst bey der fünften Dignität der Abscisse x anfängt, so wird derselbe bey jedem Halbiren der Abcisse, oder auch des Bogens, 32 mal kleiner. Man kann also hieraus beurtheilen, was man sich von dieser Art, die Länge einer krummen Linie durch Näherung zu bestimmen, zu versprechen hat, oder von wie wenigen Graden der Krümmung man den Bogen AmM annehmen müsse, wenn der Fehler, den man zuläßt, wenn man für dessen Länge $\frac{AT+TM+2AM}{3}$ annimmt, eine gewisse Grösse nicht überschreiten sollen.

§. 11.

Wir wollen um dieses auf eine leichte Art verständlicher zu machen, den Halbmesser des Krümmungskreises zur Einheit annehmen, und die Fehler bestimmen, die man zuläßt, wenn man auf diese Art die Länge eines Bogens des Krümmungskreises sucht. Es sey demnach AM ein Circulbogen, dessen Halbmesser $= 1$ ist; so ist AM dessen Chorde, $AT = TM$ die Tangente der Hälfte des Bogens. Man setze nun den Bogen stuffenweise 5, 10, 15 Gr. so wird man für

5 Gr.	$\frac{AT+TM+2AM}{3}$	$= 0,0872665$
10	. . . .	$= 0,1745334$
15	. . . .	$= 0,2618033$
20	. . . .	$= 0,3490823$
etc.		

erhalten, da hingegen die Länge des Bogens selbst für

5°	. . . .	$= 0,0872665$
10	. . . .	$= 0,1745329$
15	. . . .	$= 0,2617994$
20	. . . .	$= 0,3490659$
etc.		

ist. Zieht man diese Zahlen von den ersten ab, so bleibt für

5 Gr.	= = = = = = =	$=0,0000000$
10	= = = = = = =	$=0,0000005$
15	= = = = = = =	$=0,0000039$
20	= = = = = = =	$=0,0000165$
ꝛc.		

Woraus man sieht, daß, wenn man einen Fehler, der sich auf $\frac{1}{600000}$ des Halbmessers für einen Bogen von 20 Graden beläuft, nicht achten will, man auf diese Art Bögen von 20 Graden Krümmung rectificiren kann. Nimmt man aber lauter Bögen von 5 Graden, so ist der Fehler nicht so groß, daß er auf 10 Millionen 1 betrüge. Da nun die gemeinen Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten ebenfalls nur bis auf 10000000te Theile berechnet sind, und man sich fast bey allen Rechnungen damit begnügt, so erhellet hieraus, daß man sich aus gleichen Gründen begnügen kann, bey der Rectification jeder krummen Linie, dieselbe in solche Stücke zu theilen, deren Krümmung 5 Gr. beträgt, und daß man sodann für die Länge jedes Bogens A m A schlechthin nur

$$\frac{AT+TM+2AM}{3}$$

nehmen darf. Der Fehler wird immer kleiner als $\frac{1}{10000000}$ Theil des Halbmessers des Krümmungskreises seyn.

§. 12.

Will man sich aber statt der Berechnung der Construction bedienen, so wird die Figur selten

selten so groß gezeichnet, daß $\frac{1}{10000}$ des Halbmessers des Krümmungskreises merklich wäre, daher kann man kürzer verfahren, und mit einem male die Länge solcher Stücke der krummen Linien finden, deren Krümmung sich bis auf 20 Gr. beläuft. Wir haben nun noch zu sehen, was sowohl bey der Berechnung als bey der Construction zu thun ist.

§. 13.

Es sey demnach AMN jede krumme Linie. Fig. III. Auf AP werden die Absciſſen AP, AQ, und die senkrechten Ordinaten PM, QN genommen. TMR, VRN seyn die Tangenten in M und N; R derselben Durchschnittspunct, und MN die Chorde, so ist der zwischen M und N liegende Bogen um desto genauer

$$=\frac{MR+RN+2MN}{3}$$

je kleiner die Krümmung desselben ist, so, daß bey jeder doppelt kleinern Krümmung der Fehler bey 32 mal geringer wird (§. 10.).

§. 14.

Man setze nun

$$AP=x \quad AQ=\xi \quad MTP=\omega$$
$$PM=y \quad QN=\eta \quad NVQ=\varphi$$

so wird

$$\text{tang.}\,\omega=dy:dx$$
$$\text{tang.}\,\varphi=d\eta:d\xi$$

und folglich

$$\text{tang. } VRT = \text{tang.}(\omega - \varphi) = \frac{dy.d\xi - d\eta.dx}{dx.d\xi + dy.d\eta}$$

seyn. Hiedurch wird, weil VRT die Krümmung des Bogens ist, dieselbe bestimmt, und man kann in Absicht auf die zu erhaltende Genauigkeit nach §. 11. erörtern, ob man den fürgegebenen Bogen MN, dessen Länge zu finden, ganz beybehalten könne, oder denselben in Theile zerfällen müsse, indem man zwischen PQ noch eine oder mehrere Abscissen annimmt. Da im letztern Fall für jeden Theil einerley Rechnung vorzunehmen ist, wie für den ganzen Bogen, so können wir AM als einen solchen Theil angeben, und die Rechnung, wodurch die Chorde MN, nebst den Tangenten MR, RN, oder überhaupt die Seiten des Triangels MRN bestimmt werden, wird folgendermassen gefunden.

§. 15.

Man ziehe NH, MK mit der Abscissenlinie AQ und KRL mit den Ordinaten parallel, so ist

$$MH = ML + KN = \xi - x$$
$$LH = LR + RK = \eta - y$$

Nun ist

$$ML = MR \text{ cos. } \omega \qquad LR = MR \text{ sin. } \omega$$
$$KN = NR \text{ cos. } \varphi \qquad RK = NR \text{ sin. } \varphi$$

demnach

$$MR \text{ cos. } \omega + NR \text{ cos. } \varphi = \xi - x$$
$$MR \text{ sin. } \omega + NR \text{ sin. } \varphi = \eta - y.$$

Werden diese Gleichungen aufgelöst, so findet sich

$$MR = \frac{(\eta - y)\text{ cos. }\varphi - (\xi - x)\text{ sin. }\varphi}{\text{sin.}(\omega - \varphi)}$$

$$NR = \frac{-(\eta - y)\text{ cos. }\omega + (\xi - x)\text{ sin. }\omega}{\text{sin.}(\omega - \varphi)}$$

Da nun die Chorde

$$MN = \sqrt{((\xi - x)^2 + (\eta - \eta)^2)}$$

ist, so lassen sich vermittelst dieser dreyen Formeln die drey Seiten MR, RN, NM des Triangels MRN und daher die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens, welche

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

seyn wird, leicht finden.

§. 16.

Man kann auch, wenn man sich der trigonometrischen Tabellen bedienen will,

$$dy : dx = \text{tang. } \omega$$
$$d\eta : d\xi = \text{tang. } \varphi$$
$$(\eta - y) : (\xi - x) = \text{tang. } \psi$$

machen, und nachdem man auf diese Art die Winkel ω, φ, ψ, welche TMP, VNQ, NMH sind, gefunden, und die Chorde

$$MN = \sqrt{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)}$$

berechnet ist, so wird man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \frac{\text{f}(\psi - \varphi) + \text{f}(\omega - \psi) + 2\text{f}(\omega - \varphi)}{3\text{f}(\omega - \varphi)} . MN$$

für

für die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens erhalten.

§. 17.

Diese Formel fleußt aus den ersten Sätzen der Trigonometrie, weil

$$\psi - \varphi = RNM$$
$$\omega - \psi = RMN$$
$$\omega - \varphi = MRV$$

und die Seiten RM, RN, MN in Verhältniß der Sinus dieser Winkel sind. Uebrigens läßt sich diese Formel in sofern noch zusammenziehen, als

$$\mathrm{s}(\psi - \varphi) + \mathrm{s}(\omega - \psi) = 2\,\mathrm{s}\,\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}$$

und

$$\mathrm{sin.}(\omega - \varphi) = 2\,\mathrm{s}\,\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \mathrm{cos.}\,\frac{\omega - \varphi}{2}$$

ist. Denn werden diese Werthe substituirt, so erhält man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \mathrm{cos.}\left(\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}\right) MN : 3\,\mathrm{cos.}\,\frac{\omega - \varphi}{2} + \frac{2MN}{3}.$$

§. 18.

Um dieses Verfahren durch ein leichtes Beyspiel zu erläutern, so sey AMN eine Parabel, und

$$2x = yy$$

demnach

$$2dx = 2ydy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = \mathrm{tang.}\,\omega$$

und

und daher auch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta} = \mathrm{tang.}\,\varphi.$$

Man setze z. E. P sey der Brennpunct, folglich $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $\omega = 45$ Gr. und die Krümmung des Bogens NM werde von 5 Gr. angenommen, so ist $\varphi = 45° - 5° = 40°$. Demnach $1 : \eta =$ tang. 40 Gr.

$$\eta = 1,1917536$$
$$\log.\,\eta = 0,0761865$$
$$2\log.\,\eta = 0,1523730$$
$$\log.\,2 = 0,3010300$$
$$\log.\,\xi = 0,8513430 - 1$$

$$\xi = 0,7101384 \qquad \eta = 1,1917536$$
$$x = 0,5000000 \qquad y = 1,0000000$$
$$\xi - x = 0,2101384 \qquad \eta - y = 0,1917536$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0,9125205 = \mathrm{tang.}\,\psi$$
$$\psi = 42°.22'.52''$$
$$\frac{\omega + \varphi}{2} = 42\ .30\ .0$$

$$\frac{\omega + \varphi}{2} - \psi = 0.\ 7.\ 8 \quad \log.\,\mathrm{cos.} = 0,9999991 - 1$$
$$\frac{\omega - \varphi}{2} = 2.30.\ 0 \quad \log.\,\mathrm{cos.} = 0,9995865 - 1$$
$$\text{diff.} \quad 0,0004126$$

Ferner $NM = 0,2844777$ $\log.\,MN = 0,4540483 - 1$

$$\log.(MR + RN) = 0,4544609 - 1$$

$$MR+RN = 0,2847481$$

$$\tfrac{1}{3}(MR+RN) = 0,0949160$$
$$\tfrac{2}{3}\,MN = 0,1896518$$
$$0,2845678$$

Und dieses ist demnach bis auf einen $\frac{1}{10000000}$ Theil des halben Parameters der Parabel die Länge des Bogens MN, welche zu suchen war.

§. 19.

Nimmt man aber den Bogen grösser an, z. E. von 15 Grad Krümmung, so, daß $\omega = 45°$, $\varphi = 30$ Grad sey, so findet man

$$x = \tfrac{1}{2} \qquad \xi = \tfrac{3}{2}$$
$$y = 1 \qquad \eta = \sqrt{3}$$

demnach

$$\xi - x = 1$$
$$\eta - y = \sqrt{3} - 1 \quad \text{daher } NM = 1,2393137$$
$$\text{tang.}\,\psi = \sqrt{3} - 1 = 0,7320508$$
$$\psi = 36°.12'.22''$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega - \varphi) = 37\,.\,30\,.\,0$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega + \varphi) - \psi = 1\,.\,17\,.\,38 \quad \text{log.cos.} = 0,9998892 - 1$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega - \varphi) = 7\,.\,30\,.\,0 \quad \text{log.cos.} = 0,9962686 - 1$$
$$\text{diff.} = 0,0036206$$
$$\text{log.}\,NM = 0,0931812$$
$$\text{log.}(RM+RN) = 0,0968018$$
$$RM+RN = 1,2496888$$

$$\tfrac{1}{3}(RM+RN) = 0,4165629$$
$$\tfrac{2}{3}\,MN = 0,8262091$$
$$1,2427720.$$

Die-

Dieses wäre demnach die durch diese Näherung gefundene Länge des Bogens. Es ist aber die wahre Länge

$$= 1,2427361$$

demnach der Unterschied $0,0000359$

welcher sich kaum auf $\frac{1}{35000}$ Theil des Bogens beläuft.

§. 20.

Wenn man sich statt der Rechnung mit der Construction begnügen will, so kann man mehrentheils noch grössere Bögen vornehmen, weil man bey den Constructionen selten so scharf verfährt, daß man auf 35000 nicht um 1 fehlen solte. Ueberdies wird die Arbeit kürzer, weil die Seiten der Triangel MRN ehender gemessen als berechnet sind. Hingegen kann die Ziehung der Tangenten MR, RN, oder der Chorden MN Schwürigkeiten und Weitläuftigkeiten haben. Denn ungeachtet sich diese Linien, jede für sich betrachtet, leicht ziehen lassen, so kömmt hier die Bedingung vor, daß, wenn die Tangenten gezogen sind, die Chorden in die Berührungspuncte gezogen werden; oder hinwiederum, daß, wenn die Chorden gezogen sind, die Tangenten an die Endpuncten der Chorden gezogen werden. Hiebey kömmt es auf besondere Vortheile an, die man aus der Natur der vorhabenden krummen Linie vorerst finden muß, so wie man dergleichen für die parabolischen, logarithmischen und andere Linien gefunden.

§. 21.

§. 21.

Es kommen aber besonders in der angewandten Mathematik Fälle vor, wo die krumme Linie schlechthin durch Versuche bestimmt wird, und wo die Gleichung dazu noch nicht bekannt ist. Und da ist die Frage: wie, wenn man an solche Linien Tangenten gezogen, der Berührungspunct gefunden werden könne? Diese Frage läßt sich für alle diejenigen Berührungspuncten, wo entweder die krumme Linie einen Diameter hat, oder wo wenigstens der Halbmesser des Krümmungskreises weder o noch ∞ ist, folgendermassen auflösen: Es
Fig. III. sey AMB ein Stück einer krummen Linie, und an dieselbe sey die Tangente TM gezogen. Um den Berührungspunct M zu finden, ziehe man mit der Tangente parallele Chorden AB, so viel man will, und so nahe beysammen, als man will. Jede Chorde theile man in zween gleiche Theile, und so wird sich durch die Theilungspuncte C, eine Linie MC ziehen lassen, welche in den Berührungspunct M trift. Diese Linie ist gerade und ein Diameter, wenn AMN ein Kegelschnitt ist. In andern Fällen kann sie ebenfals gerade seyn, wenn nemlich die krumme Linie einen oder mehrere Diameter hat, und einer derselben in den Punct M trift. In allen übrigen Fällen ist CM eine krumme Linie, und zwar ist ihre Krümmung desto geringer, je weniger sich die Linie AMB von der Krümmung eines Kegelschnittes entfernt. Da nun bey denen krummen Linien, wo diese Bedingung wegfallen kann, sie nur bey einzelnen Puncten, wie z. E. bey den Wendungspuncten wegfällt, so kann diese Methode überhaupt betrachtet so gut als allgemein angesehen werden. Daß aber der Gebrauch davon viel allgemeiner sey läßt sich leicht erachten. Man setze z. E. AB sey eine Abscissenlinie, so habe die Ordinate in M ein Maximum. Die gröste Ordinate findet sich durch Ziehung der mit AB parallelen Tangente ohne Mühe. Will man aber die Ordinate selbst ziehen, so muß vorerst der Punct M gefunden werden. Und dazu dient die erst angegebene Methode, immer vorausgesetzt, daß die Gleichung, wodurch die Natur der Linie AMB ausgedruckt wird, nicht bekannt sey.

§. 22.

Um nun zu sehen, wiefern die bisher angeführten Betrachtungen ebenfalls zur Quadratur der krummen Linien dienen können, wenn diese vermittelst der Vielecke durch Näherung gesucht wird, so werden wir zur 2ten Figur zu- Fig. II
rücke kehren, und da beut sich die Anmerkung von selbst an, daß wenn der Bogen AmM ein Stücke einer krummen Linie ist, sodann ATM ein Stück des um dieselbe beschriebenen Vieleckes sey, so wie die Chorde AM eine Seite des in derselben beschriebenen Vieleckes ist. Der Unterschied des Flächenraumes ergiebt sich theils aus dem Abschnitte AMm, und um so

so viel ist die krumme Linie grösser als das zu der Seite A M gehörende Theil des in der krummen Linie beschriebenen Vieleckes; theils aus dem Raume A m M T, um welchen die Linie kleiner ist als der zu den Seiten A T M gehörende Theil des um die krumme Linie beschriebenen Vieleckes.

§. 23.

Wir wollen damit anfangen, daß wir den Raum A m M P suchen, und hiezu werden wir die vorhin gebrauchte Benennung anwenden. (§. 6. seqq.) Es ist demnach

$$AmMP = \int y\,dx = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

hingegen ist der Raum des

$$\triangle AMP = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{1}{2}dx^6 + \text{etc.}$$

Nimmt man demnach $\frac{2}{3}$ von diesem Triangel, so ist

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP = \tfrac{1}{3}xy = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{3}bx^4 + \tfrac{1}{3}cx^5 + \tfrac{1}{3}dx^6 + \text{etc.}$$

hievon der Raum A m M P abgezogen, bleibt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP - AmMP = \tfrac{1}{12}bx^4 + \tfrac{2}{15}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

Sofern man nun diesen Unterschied für nichts achten kann, läßt sich der Raum A m M P als $\frac{2}{3}$ von dem Raum des Triangels A M P ansehen, und eben so wird der Raum A m M Q $= \frac{2}{3}$ APMQ seyn. Denn A M m A $=$ AMP

$AMP - AmMP = \frac{1}{3}AMP = \frac{1}{6}APMQ$, und folglich $AMmQ = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2})\,APMQ = \frac{2}{3}APMQ$.

§. 24.

Alles dieses hat nach geometrischer Schärfe statt, wenn der Bogen A m M ein Stück einer Parabel ist. Demnach kömmt es in jedem andern Fall der Wahrheit um desto näher, je weniger die Krümmung des Bogens A m M von der Krümmung eines denselben osculirenden parabolischen Bogens abweicht.

§. 25.

Wir können aber ferners das Segment A M m A, mit dem Triangel A M T vergleichen, dessen Inhalt $= \frac{1}{2}$. A T. P M ist. Werden demnach die Werthe

$$AT = \tfrac{1}{2}x + \frac{bxx}{4a} + cx^3 + \tfrac{3}{4}d.x^4 + \&c.$$
$$- \frac{3bb}{8aa} \cdots - \frac{5bc}{4aa} \cdots$$
$$+ \frac{9b^3}{8a^3} \cdots$$
$$PM = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

mit einander multiplicirt, so findet sich die Hälfte des Productes $\triangle AMT =$

$$\tfrac{1}{4}ax^3 + \tfrac{3}{4}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{5}{8}dx^6 + \&c.$$
$$- \frac{bb}{16a} \cdots - \frac{bc}{4a} \cdots$$
$$+ \frac{3b^3}{8a^2} \cdots$$

Hinge-

Hingegen ist das Segment $AmMA = \triangle AMP - AmMP$, folglich $AmMA =$
$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{3}{10}cx^5 + \frac{1}{3}dx^6 + \&c.$
Wird demnach wiederum $\frac{2}{3}$ von dem Triangel AMT genommen und das Segment $AmMA$ davon abgezogen, so bleibt $\frac{2}{3}AMT -$

$$AmMA = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{30}cx^5 + \frac{1}{12}dx^6 + \text{rc.}$$
$$- \frac{bb}{24a}\ldots - \frac{bc}{6a}\ldots$$
$$+ \frac{b^3}{4a^2}\ldots$$

Dieser Unterschied wird ebenfals $=0$, so ofte AmM ein Stück einer Parabel ist. Demnach ist derselbe in jedem andern Fall desto unmerklicher, je weniger AmM von der Krümmung des osculirenden parabolischen Bogens abweicht. Man kann daher, so oft die Krümmung des Bogens von wenigen Graden ist, für das Segment $AmMA$, $\frac{2}{3}$ des $\triangle AMT$ nehmen.

§. 26.

Will man aber das Segment $AmMA$ mit beyden Triangeln AMT und AMP vergleichen, so darf man nur $\frac{1}{4}AMP + \frac{1}{6}AMT$ zusammen addiren, und das Segment wird nur um

$$+ \frac{11}{120}cx^5 + \frac{5}{48}dx^6 + \&c.$$
$$+ \frac{b}{24a}\ldots$$
$$- \frac{b^3}{16a^2}\ldots$$

grös-

ser seyn. Da dieser Unterschied, welcher bey jedem parabolischen Bogen ebenfalls $=0$ wird, sich erst bey der fünften Dignität der Abscisse x äussert, so sieht man leicht, daß man auf diese Art der Wahrheit sehr viel näher kömmt, und der Bogen bey gleichem Fehler merklich grösser seyn kann.

§. 27.

Es sey z. E. AmM ein Circulbogen $= \omega$, dessen Halbmesser $= 1$, so ist $AP = \sin.\omega$, $Mp = 1 - \cos.\omega$, $AT = TM = \tang.\frac{1}{2}\omega$, demnach

$$\frac{1}{4}\triangle AMP = \frac{1}{8}(1-\cos.\omega)\,\mathrm{s}\,\omega = \frac{1}{8}\mathrm{s}\,\omega - \frac{1}{16}\mathrm{s}\,2\omega$$
$$\frac{1}{6}\triangle AMT = \frac{1}{12}\tang.\frac{1}{2}\omega\,(1-\cos.\omega) = \frac{1}{6}\tang.\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{12}\sin.\omega$$

und

$$\frac{1}{4}\triangle AMP + \frac{1}{6}\triangle AMT = \frac{1}{6}\tang.\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{24}\sin.\omega - \frac{1}{16}\mathrm{s}\,2\omega.$$

Dieses giebt für einen Bogen von 20 Graden den Werth = = = 0,0034645.
Es ist aber der wahre Inhalt des Segmentes = = = 0,0035228

diff. 0,0000583.

Der Unterschied ist $\frac{1}{60}$ Theil des Segmentes, oder $\frac{1}{35000}$ Theil des Quadrats des Halbmessers, oder der Einheit, welche bey dieser Ausmessung zum Grunde liegt. Wäre der Bogen nur von 10 Gr. so würde man nach dieser Formel 0, 0004405 anstatt 0, 0004423

finden,

finden, und daher der Unterschied nur 0,0000018 seyn.

§. 28.

Indessen, wenn es nur um das Segment AmMn zu thun ist, so kann man es bey der ersten Methode (§. 23.) bewenden lassen, wenn man nemlich die Chorde AM mit der Höhe nm multiplicirt und von dem Producte $\frac{2}{3}$ nimmt. Man setze z. E. wiederum AmM sey ein Circulbogen von ω Graden, so ist die Chorde $AM = 2\ \sin.\frac{1}{2}\omega$, und die Sagitte $nm = 1 - \cos.\frac{1}{2}\omega$, daher

$$\tfrac{2}{3}.AM.nm = \tfrac{4}{3}(\sin.\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin.\omega)$$

dies giebt für den Bogen von 20 Graden 0,0035175 anstatt des wahren Inhaltes 0,0035228, der Unterschied ist nun hier nur 0,0000053, bey 11 mal kleiner als vorhin, welches daher rührt, weil hier anstatt des Segmentes AmMQ das Segment AmMnA quadrirt worden.

§. 29.

Fig. V. Es sey, um nun zu allgemeinern Betrachtungen fortzuschreiten, AμmM ein Stück einer beliebigen krummen Linie, AP eine Tangente, A deren Berührungspunct, AN, MP auf AP senkrecht, MN parallel, und man habe das Segment AMN zu quadriren. Um dieses auch bey solchen krummen Linien, für welche man die Gleichung nicht weiß, und die folglich aus Versuchen construirt, oder auch von freyer Hand gezogen sind, so genau man es gebraucht oder verlangt, oder auch so genau es die Grösse der Figur zuläßt, zu erhalten, kann man die Linie in m, μ in beliebige kleinere Theile theilen, und in dem man Aμ, μm, mM durch gerade Linie zusammen zieht, das dadurch entstehende Vieleck NAμmM besonders, und nach den erst angegebenen Methoden die kleinen Segmente Aμ, μm, mM jedes besonders quadriren, und die Summe wird dem Wahren desto näher kommen, in je mehr Theile man den Bogen AM getheilt hat. Es ist dabey eben nicht nothwendig, daß die Theile einander genau gleich seyn, jedoch ist es gut, wenn sie nicht gar zu ungleich sind, weil die grössern Segmente nach den erst angegebenen Methoden minder genau quadrirt werden als die kleinern.

§. 30.

Wir wollen aber das Willkührliche, welches bey dieser Eintheilung bleibt, so einschränken, daß wir die Abscisse AP in beliebiger Anzahl gleicher Theile theilen, und aus den Theilungspuncten, dergleichen π, p sind, Ordinaten $\pi\mu$, pm aufrichten, und durch Ziehung der Parallelen $\mu\nu$, mn, die Rectangel A$\nu\mu\pi$, Anmp vollenden. Nun kann der Inhalt dieser Rectangel, sowohl durch Rechnung als durch Construction, immer leicht gefunden werden. Die Frage ist demnach, ob sich aus densel-

denselben der Inhalt des Segmentes AMN, oder auch der Segmente Amn, A$\mu\nu$ eben so leicht, und um desto genauer finden lasse, in je mehr gleiche Theile AP getheilt worden? Und zwar, welches wohl zu merken, ohne daß man weiter nichts als den Inhalt der Rectangel Aμ, Am, AM &c. wisse.

§. 31.

Die Bedingung, die wir zur Auflösung dieser Frage, annehmen, ist, daß die Abscissen auf der Tangente AP, und zwar von dem Berührungspunct A an gerechnet, genommen werden. Sodann, da wir die Anzahl der Theile willkührlich und daher unbestimmt lassen, so werden wir Aπ den ersten, πp den zweyten, pP den dritten Theil nennen, und auf diese Art fortfahren, um sodann die Wahl zu behalten, bey welchem wir stehen bleiben wollen.

§. 32.

Es sey demnach

$$\begin{array}{llll} A\pi = x & \pi\mu = y' & A\pi\mu\nu = R' & A\mu\nu = S' \\ Ap = 2x & pm = y'' & Apmn = R'' & Amn = S'' \\ AP = 3x & PM = y''' & APMN = R''' & AMN = S''' \\ \&c. & \&c. & \&c. & \&c. \end{array}$$

Und die Verhältniß zwischen x, y, werden wie vorhin (§. 8.) und aus eben den Gründen, durch die Reihe

$$y' = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

ausgedrückt; so wird man

y''=

$$\begin{array}{l} y'' = 4ax^2 + 8bx^3 + 16cx^4 + 32dx^5 + \text{ꝛc.} \\ y''' = 9ax^2 + 27bx^3 + 81cx^4 + 243dx^5 + \text{ꝛc.} \\ y^{IV} = 16ax^2 + 64bx^3 + 256cx^4 + 1024dx^5 + \text{ꝛc.} \\ \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R' = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + \text{ꝛc.} \\ R'' = 8ax^3 + 16bx^4 + 32cx^5 + 64dx^6 + \text{ꝛc.} \\ R''' = 27ax^3 + 81bx^4 + 243cx^5 + 729dx^6 + \text{ꝛc.} \\ R^{IV} = 64ax^3 + 256bx^4 + 1024cx^5 + 4096dx^6 + \text{ꝛc.} \\ \&c. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} S' = \frac{2}{3}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{4}{5}cx^5 + \frac{5}{6}dx^6 + \text{ꝛc.} \\ S'' = \frac{2\cdot 8}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 16}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 32}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 64}{6}dx^6 + \text{ꝛc.} \\ S''' = \frac{2\cdot 27}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 81}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 243}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 729}{6}dx^6 + \text{ꝛc.} \\ S^{IV} = \frac{2\cdot 64}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 256}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 1024}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 4096}{6}dx^6 + \text{ꝛc.} \\ \&c. \end{array}$$

erhalten. Um nun hiebey die Brüche zu vermeiden, und nicht jedes Segment besonders mit den Rectangeln zu vergleichen, werden wir überhaupt

$$S = \alpha ax^3 + \beta bx^4 + \gamma cx^5 + \delta dx^6 + \text{ꝛc.}$$

setzen, weil die Werthe von α, β, γ, δ &c. nachgehends ohne Mühe für die Segmente S', S'', S''' ꝛc. können gesetzt werden.

§. 33.

Da nun die Reihen, so wir für jede Rectangel und Segmente gefunden, nur in den Zahlen, womit ihre Glieder multiplicirt werden, von einander verschieden sind, so läßt sich für jedes Segment eine Reihe von Zahlen m, n, p, q, r &c. gedenken, so, daß

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \text{ꝛc.}$$

werde. Da nun hiebey x nicht veränderlich seyn könnte, dafern diese Vergleichung nicht auch bey jedem Gliede statt hätte, so erhalten wir dadurch

$$\begin{aligned}
\alpha &= m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}\\
\beta &= m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}\\
\gamma &= m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}\\
\delta &= m + 64n + 729p + 4096q + 15625r + \text{ꝛc.}\\
\varepsilon &= m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

§. 34.

Da diese Gleichungen in allwegen ins Unendliche fortgehen, so kömmt es nun darauf an, wie viele Glieder man beybehalten will, oder auch in wie viele Theile die Abscisse AP getheilt wird. So viele Glieder man beybehält, so viele Gleichungen werden auch beybehalten, um m, n, p &c. dadurch zu bestimmen. Da aber alle Coefficienten geometrische Progressionen sind, so findet sich in der Auflösung etwas einförmiges, welches macht, daß die verschiedenen Werthe, so m, n, p, q &c. erhalten, wenn man 1, 2, 3 ꝛc. von diesen Buchstaben beybehält, nach gewissen Gesetzen können aus einander hergeleitet werden. So z. E. um die verschiedene Werthe des m zu finden, schaft man

man aus diesen Gleichungen, der Ordnung nach, n, p, q &c. weg. Nun wird erstlich n weggeschaft, wenn jede Gleichung verdoppelt von der nächstfolgenden abgezogen wird. Denn so bleibt

$$\begin{aligned}
\beta - 2\alpha &= -m + 27p + 128q + 375r + \text{ꝛc.}\\
\gamma - 2\beta &= -m + 81p + 512q + 1875r + \text{ꝛc.}\\
\delta - 2\gamma &= -m + 243p + 2048q + 9375r + \text{ꝛc.}\\
\varepsilon - 2\delta &= -m + 729p + 8192q + 46875r + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

&c.

Hier sind die Coefficienten ebenfalls geometrische Progressionen. Daher wird p weggeschaft, wenn jede Gleichung dreyfach genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird; so bleibt

$$\begin{aligned}
\gamma - 5\beta + 6\alpha &= 2m + 128q + 750r + \text{ꝛc.}\\
\delta - 5\gamma + 6\beta &= 2m + 512q + 3750r + \text{ꝛc.}\\
\varepsilon - 5\delta + 6\gamma &= 2m + 2048q + 18750r + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

&c.

Um eben so q wegzuschaffen, wird jede Gleichung vierfach genommen von der nächstfolgenden abgezogen; demnach bleibt

$$\begin{aligned}
\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha &= -6m + 750r + \text{ꝛc.}\\
\varepsilon - 9\delta + 26\gamma - 24\beta &= -6m + 3750r + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

&c.

Aus diesen Gleichungen wird r weggeschaft, wenn jede fünffach genommen von der nächstfolgenden abgezogen wird. Und so bleibt

$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta - 120\alpha = 24m + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art erhält man, der Ordnung nach, die Werthe

$m = \alpha$
$m = 2\alpha - \beta$
$2m = 6\alpha - 5\beta + \gamma$
$6m = 24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta$
$24m = 120\alpha - 154\beta + 71\gamma - 14\delta + \varepsilon$
&c.

Und man sieht aus der Art wie die Buchstaben m, p, q, r &c. weggeschaft worden, daß in diesen Werthen von m die Coefficienten durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ ꝛc.

erzeugt werden.

§. 35.

Aus denen in vorhergehenden §. gefundenen Ueberresten, lassen sich nun ferner die Werthe von jedem der übrigen Buchstaben finden. Denn man darf nur anstatt denselben wegzuschaffen, m wegschaffen. So z. E. wenn man die Werthe von q finden will, so zieht man die Gleichungen

$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r +$ ꝛc.
$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r +$ ꝛc.
$\varepsilon - 5\gamma + 6\delta = 2m + 2048q + 18750r +$ ꝛc.
&c.

jede von der nächstfolgenden ab, und so bleibt

$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 384q + 3000r +$ ꝛc.
$\varepsilon - 6\delta + 11\gamma - 6\beta = 1536q + 15000r +$ ꝛc.
&c.

Hier wird nun, um q beyzubehalten, r weggeschaft, indem man jede Gleichung fünffach genommen von der nächstfolgenden abzieht; und so bleibt

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = -384q +$ ꝛc.
&c.

Hier werden demnach, weil man, anstatt wie vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m wegzuschaffen nur einfach abgezogen worden, die Coefficienten der Werthe von q nicht durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).$ ꝛc.

sondern der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1)$ ꝛc.

erzeugt. Man kann zugleich aus dieser Anmerkung abnehmen, wie die Factoren für n, p, r &c. aussehen müssen, da für jeden dieser Buchstaben statt der 2, 3, 5 ꝛc. fachen, eine einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p, q &c. in nebenstehender Tabelle vorstellen.

§. 37.

Die Bildung dieser Tabelle beruht fürnehmlich auf der Bestimmung der Coefficienten, so in den Zählern dieser Brüche vorkommen. Und dabey liegen die untersten Brüche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Diese entstehen eben so wie die obersten aus der Multiplication der Binomialfactoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ ꝛc.

S 5 die

ad pag. 281.

$+m=$	$\frac{\alpha}{1}$	$\frac{2\alpha-\beta}{1.1}$	$\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{1.1.2}$	$\frac{24\alpha-26\beta+9\gamma-\delta}{1.1.2.3}$	$\frac{120\alpha-154\beta+71\gamma-14\delta+\varepsilon}{1.1.2.3.4}$	$\frac{720\alpha-1044\beta+580\gamma-155\delta+20\varepsilon-\zeta}{1.1.2.3.4.5}$	&c.
$-n=$	..	$\frac{\alpha-\beta}{8.1}$	$\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{8.1.1}$	$\frac{12\alpha-19\beta+8\gamma-\delta}{8.1.1.2}$	$\frac{60\alpha-107\beta+59\gamma-13\delta+\varepsilon}{8.1.1.2.3}$	$\frac{360\alpha-702\beta+461\gamma-137\delta+19\varepsilon-\zeta}{8.1.1.2.3.4}$	&c.
$+p=$	..	...	$\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{27.2.1}$	$\frac{8\alpha-14\beta+7\gamma-\delta}{27.2.1.1}$	$\frac{40\alpha-78\beta+49\gamma-12\delta+\varepsilon}{27.2.1.1.2}$	$\frac{240\alpha-508\beta+372\gamma-121\delta+18\varepsilon-\zeta}{27.2.1.1.2.3}$	&c.
$-q=$	..	...	...	$\frac{6\alpha-11\beta+6\gamma-\delta}{64.3.2.1}$	$\frac{30\alpha-61\beta+41\gamma-11\delta+\varepsilon}{64.3.2.1.1}$	$\frac{180\alpha-396\beta+307\gamma-107\delta+17\varepsilon-\zeta}{64.3.2.1.1.2}$	&c.
$+r=$	..	...	...	.....	$\frac{24\alpha-50\beta+35\gamma-10\delta+\varepsilon}{125.4.3.2.1}$	$\frac{144\alpha-324\beta+260\gamma-95\delta+16\varepsilon-\zeta}{125.4.3.2.1.1}$	&c.
$-s=$	..	...	...	.....	....	$\frac{120\alpha-274\beta+225\gamma-85\delta+15\varepsilon-\zeta}{216.5.4.3.2.1}$	&c.

&c.

die übrigen entspringen aus diesen durch ähnliche Factoren. So z. E. für q

$(6-11+6-1).(5-1) = 30-61+41-11+1$

$(30-61+41-11+1).(6-1) = 180-396+307-107+17-1$ 2c.

Die Nenner aber sind Producte aus Cubiczahlen und den natürlichen Zahlen 1, 2, 4 2c.

§. 38.

Fig. V. Um nun den Gebrauch dieser Tabelle zu zeigen, so wollen wir z. E. setzen, die fürgegebene Abscisse A P werde in 3 gleiche Theile getheilt, und es solle das Segment A M N quadrirt werden. Hier haben wir demnach (§. 32.)

$$S = S''' = \frac{2.27}{3} a x^4 + \frac{3.81}{4} b x^4 + \frac{4.243}{5} c x^5$$

folglich

$$\alpha = \frac{2.27}{3} = 18$$

$$\beta = \frac{3.81}{4} = \frac{243}{4}$$

$$\gamma = \frac{4.243}{5} = \frac{972}{5}$$

und in vorstehender Tabelle die dritte Columne

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{8}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{54}$$

Wer-

Werden in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ gesetzt, so erhält man

$$m = -\tfrac{27}{40}$$

$$n = -\tfrac{27}{40}$$

$$p = +\tfrac{107}{120}$$

demnach

$$AMN = \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40} Apmn - \tfrac{27}{40} A\pi\mu\nu$$

woraus man sieht, der wievielte Theil von den drey Rectangeln müsse genommen werden, um den Inhalt des Segmentes durch diese Näherung zu erhalten. Man erhält denselben vollkommen, wenn die Gleichung für die krumme Linie wirklich nicht mehr als die drey ersten Glieder

$$y = a x^2 + b x^3 + c x^4$$

hat, oder auch nur

$$y = a x^2 + b x^3$$

oder endlich auch nur

$$y = a x^2$$

ist.

§. 39.

Um aber ein Beyspiel zu geben, wo dieses nicht vorkömmt, und wo man folglich in der That nur eine Näherung erhält, so wollen wir setzen A M sey ein Circulbogen von 30 Gr. und dessen Halbmesser = 1. Hier haben wir demnach

$AP = \sin. 30^\circ = \tfrac{1}{2}$ $PM = 1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0,1339746$

$Ap = \tfrac{2}{3} AP = \tfrac{1}{3}$ $pm = 1 - \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0,0571910$

$A\pi = \tfrac{1}{3} AP = \tfrac{1}{6}$ $\pi\mu = 1 - \sqrt{\tfrac{35}{36}} = 0,0139868$

und

und hieraus

$$APMN = 0,0669873$$
$$Apmn = 0,0190637$$
$$A\pi\mu\nu = 0,0023311$$

demnach den Inhalt des Segmentes AMN

$$= \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40}(Apmn + A\pi\mu\nu)$$
$$= 0,0452888$$

Es ist aber der wahre Inhalt $= 0,0452930$

demnach der Unterschied nur $= 0,0000042$

Da sich dieser Unterschied erst bey der sechsten Dignität der Abscisse x zu äussern anfängt, so wird derselbe 64 mal geringer, wenn man den Bogen nur halb so groß annimmt.

§. 40.

Setzt man, die Abscisse A P solle in 4 gleiche Theile getheilt werden, und man wolle ebenfalls das ganze Segment A M N quadriren, so haben wir $S = S^{IV}$, demnach (§. 32.)

$$\alpha = \frac{2.64}{3} = \frac{128}{3}$$
$$\beta = \frac{3.256}{4} = 192$$
$$\gamma = \frac{4.1024}{5} = \frac{4096}{5}$$
$$\delta = \frac{5.4096}{6} = \frac{10240}{3}$$

und aus der Tabelle (§. 36.)

+m

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6}$$
$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{16}$$
$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{54}$$
$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{384}$$

Werden in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ, δ gesetzt, so findet man nach geschehener Reduction

$$m = -\frac{64}{45}$$
$$n = -\frac{4}{15}$$
$$p = -\frac{63}{135}$$
$$q = +\frac{83}{90}$$

demnach erhält man

$$S = \tfrac{83}{90} R^{IV} - \tfrac{63}{135} R''' - \tfrac{4}{15} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 41.

Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0452925$$

welcher Werth von den wahren nur um 0,0000005 verschieden ist.

§. 42.

Wollte man hingegen die Abscisse AP nur in zween Theile theilen, so würde man, ebenfals für das ganze Segment AMN (§. 32. 36.)

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{16}{3}$$
$$\beta = 12$$
$$+m = 2\alpha - \beta$$
$$-n = \alpha - \beta$$

und hieraus

$$m = -\tfrac{4}{3}$$
$$n = +\tfrac{5}{6}$$

demnach

$$S = \tfrac{5}{6}R'' - \tfrac{4}{3}R'$$

finden. Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452481$$

welches um 0, 0000449 zu wenig ist.

§. 43.

Würde man aber die Abscisse AP ganz behalten, so würde man (§. cit.)

$$\alpha = m = \tfrac{2}{3}$$

demnach

$$S = \tfrac{2}{3}R'$$

erhalten. Dieses giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0446582$$

welches um 0,0006348 zu wenig ist. Man sieht demnach aus diesen für einerley Segment gefundenen Unterschieden

0,0006348
0,0000449
0,0000046
0,0000005

Um wie viel man dem Wahren näher kömmt, wenn

wenn man die Abscisse in mehrere Theile theilt. Ueberdies werden diese Unterschiede, wenn der Bogen selbst kleiner ist, in ungleicher Verhältnis kleiner. Denn wenn man nur die Hälfte des Bogens nimmt, so wird der erste Unterschied 16, der andere 32, der dritte 64, der vierte 128 mal kleiner.

§. 44.

Was aber bey allem diesem besonders anzumerken ist, besteht darin, daß die Coefficienten der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wodurch die Natur der krummen Lienie AM überhaupt ausgedruckt wird, keinen Einfluß auf die Bestimmung der Buchstaben m, n, p, q, r &c. haben, ungeachtet sie daraus hergeleitet sind. In der That bestimmt diese Gleichung oder Reihe in jedem fürgegebenen Fall nur die Grösse der Rectangel R', R'', R''' &c. aus welchen sodann S vermitelst der Formel

$$S = mR' + nR'' + pR''' + \&c.$$

gefunden wird.

§. 45.

Sehen wir aber genauer nach, wie die Buchstaben m, n, p &c. bestimmt werden, so findet sichs, daß wenn in der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wechselsweise einige Glieder $= 0$ sind, die Buchstaben m, n, p &c. auf eine andere Art bestimmt werden

werden können. Wir wollen z. E. $b = d = f =$ &c. $= 0$ setzen, und so werden wir statt den (§. 33.) angenommenen Gleichungen folgende

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + \text{ic.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + \text{ic.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + \text{ic.}$$
$$\eta = m + 512n + 19683p + 262144q + \text{ic.}$$
&c.

haben, weil die für β, δ, ζ &c. daselbst angenommene Gleichungen hier wegbleiben können.

§. 46.

Die Auflösung dieser Gleichungen ist nun der vorhergehenden ganz ähnlich. So wird um m zu finden, nach und nach n, p, q &c. weggeschaft. Man zieht nemlich, um anfangs n wegzuschaffen, jede Gleichung vierfach genommen, von der nächstfolgenden ab, und so bleibt

$$\gamma - 4\alpha = -3m + 135p + 768q + \text{ic.}$$
$$\varepsilon - 4\gamma = -3m + 1215p + 12288q + \text{ic.}$$
$$\eta - 4\varepsilon = -3m + 10935p + 196608q + \text{ic.}$$
&c.

Um ferner p wegzuschaffen, wird jede Gleichung 9 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen, und so bleibt

$$\varepsilon - 13\gamma + 36\alpha = 24m + 5376q + \text{ic.}$$
$$\eta - 13\varepsilon + 36\gamma = 24m + 86016q + \text{ic.}$$
&c.

Eben so wird q weggeschaft, wenn jede Gleichung 16 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird, und so bleibt

$$\eta - 29\varepsilon + 244\gamma - 576\alpha = -360m + \text{ic.}$$

Auf diese Art sind nun der Ordnung nach die Werthe, so m erhält,

$$m = \alpha$$
$$m = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$
$$m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{3.8.}$$
$$m = \frac{576\alpha - 244\gamma + 29\varepsilon - \eta}{3.8.15.}$$
&c.

Die Coefficienten entstehen nun hier aus der Multiplication der Factoren

$$1.(4-1).(9-1).(16-1).(25-1).\text{ic.}$$

§. 47.

Die Werthe der übrigen Buchstaben n, p, q &c. finden sich auf eine ähnliche Art. So z. E. wird für p erstlich

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \text{\&c.}$$

ferner

ferner

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27.(9-1).(9-4)p + 64(16-1).(16-4)\,q + \&c.$$

sodann

$$\eta - 21\varepsilon + 84\gamma - 64\alpha = 27.(9-1)(9-4)(9-16)p + \&c.$$

&c.

Hingegen erhält man für n

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 10\gamma + 9\alpha = 8.(4-1)(4-9)n + 64(16-1)(16-9)q + \&c.$$

$$\eta - 26\varepsilon + 169\gamma - 144\alpha = 8.(4-1)(4-9)(4-16)n + \&c.$$

&c.

Und eben so für q

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27(9-1).(9-4)p + 64.(16-1).(16-4)q + \&c.$$

$$\eta - 14\varepsilon + 49\gamma - 36\alpha = 64.(16-1).(16-4).(16-9).q + \&c.$$

&c.

§. 48.

Hieraus erwächst sodann folgende Tabelle

+m=

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	&c.
$-n=$	. . .	$\frac{\alpha-\gamma}{8.(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{8.(4-1).(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{8.(4-1).(9-4).(16-4)}$	&c.
$+p=$	. . .	. . .	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{27.(9-1).(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{27.(9-1).(9-4).(16-9)}$	&c.
$-q=$	. . .	. . .	. . . .	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{64.(16-1).(16-4).(16-9)}$	&c.

§. 49.

§. 49.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von der vorhergehenden ganz ähnlich, dagegen aber nicht so allgemein, weil er sich nur auf die Fälle erstreckt, wo

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

ist. Man setze z. E. die Abscisse werde nur in zween Theile getheilt, so haben wir $S = S''$, und daher (§. 32. 45.)

$$\alpha = \frac{2.8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\gamma = \frac{4.32}{5} = \frac{128}{5}$$

und aus der zweyten Columne der Tabelle (§. 48.)

$$+m = \frac{4\alpha - \gamma}{4-1} = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$-n = \frac{\alpha - \gamma}{8.(4-1)} = \frac{\alpha - \gamma}{24}$$

folglich

$$m = -\tfrac{64}{45}$$
$$n = +\tfrac{38}{45}$$

und daher

$$S = \tfrac{38}{45} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 50.

Da bey dem Circul die Bedingung

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

vorkömmt, so wollen wir wiederum einen Circulbogen

culbogen von 30 Gr. für AM setzen, und da giebt die erst gefundene Formel

$$S = 0,0452767$$

welches nur um 0,0000163 von dem Wahren abweicht. Ein Unterschied, der beynahe drey mal geringer ist, als derjenige, den wir für eben diesen Fall (§. 42.) aus den ersten Formeln gefunden haben.

§. 51.

Wir können nun ferners eben diese Methode auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo die bisher vorausgesetzte Bedingung (§. 31.) wegfällt, und daher die Lage der Abscissenlinie ganz willkührlich gelassen wird. Es sey demnach BM ein Stück einer krummen Linie. Auf Fig. VI.
AP werden die Abscissen von A an gerechnet, und die Ordinaten seyn auf dieser Linie senkrecht. Solte nun das Stück ABMP quadrirt werden, so kann man wiederum, wie vorhin, die Abscisse AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen; und da ist die Frage, wie der gesuchte Inhalt von ABMP durch die vermittelst solcher Theilung entstehende Rectangel APMN, Apmn, $A\pi\mu\nu$ &c. bestimmt werden könne, und wie durch eben dieselbe der Inhalt der einzeln Theile $AB\mu\pi$, ABmp ꝛc. bestimmt werde?

§. 52.

Es sey

$$A\pi = x \quad Ap = 2x \quad AP = 3x \ \&c.$$
$$\pi\mu = y' \quad pm = y'' \quad PM = y''' \ \&c.$$

und die Verhältniß zwischen x, y werden durch die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

ausgedrückt. Man nenne ferner die Segmente S', S'', S''' &c. und die Rectangel R', R'', R''' &c. so haben wir

$$R' = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R'' = 2ax + 4bx^2 + 8cx^3 + 16dx^4 + 32ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R''' = 3ax + 9bx^2 + 27cx^3 + 81dx^4 + 243ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$R^{IV} = 4ax + 16bx^2 + 64cx^3 + 256dx^4 + 1024ex^5 + \text{ꝛc.}$$
&c.

Ferner

$$S' = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$S'' = 2ax + \tfrac{4}{2}bx^2 + \tfrac{8}{3}cx^3 + \tfrac{16}{4}dx^4 + \tfrac{32}{5}ex^5 \ldots$$
$$S''' = 3ax + \tfrac{9}{2}bx^2 + \tfrac{27}{3}cx^3 + \tfrac{81}{4}dx^4 + \tfrac{243}{5}ex^5 \ldots$$
$$S^{IV} = 4ax + \tfrac{16}{2}bx^2 + \tfrac{64}{3}cx^3 + \tfrac{256}{4}dx^4 + \tfrac{1024}{5}ex^5 \ldots$$

wofür wir überhaupt

$$S = \alpha ax + \beta bx^2 + \gamma cx^3 + \delta dx^4 + \varepsilon ex^5 + \text{ꝛc.}$$

setzen, welche Reihe sich auch auf die zwischen die Theilungspuncte fallende Abscissen x ausdehnet, weil auch diese Räume $\int y\, dx$ durch die Rectangel R', R'', R''' &c. bestimmen lassen.

§. 53.

§. 53.

Man setze nun wiederum

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \&c.$$

so erhält man aus gleichem Grunde, wie §. 33. die Gleichungen

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{ꝛc.}$$
$$\beta = m + 4n + 9p + 16q + 25r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$
&c.

Demnach sind die Gleichungen wodurch m bestimmt wird

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.$$
$$\beta - 2\alpha = (1-2)m + 3(3-2)p + 4(4-2)q + 5(5-2)r + \&c.$$
$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = (1-2).(1-3)m + 4(4-2).(4-3)q + 5(5-2)(5-3)r + \&c.$$
$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = (1-2).(1-3).(1-4)m + 5.(5-2).(5-3).(5-4)r + \&c.$$
$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta + 120\alpha = (1-2).(1-3).(1-4).(1-5)m + \&c.$$
&c.

Ferner die Gleichung wodurch n bestimmt wird

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$
$$\gamma - 4\beta + 3\alpha = 2(2-1)(2-3)n + 4.(4-1)(4-3)q + 5(5-1)(5-3)r + \&c.$$

 δ—

$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).$
$(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r + \&c.$

$\varepsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\beta + 60\alpha = 2.(2-1).$
$(2-3).(2-4).(2-5)n + \&c.$

&c.

Eben so die Gleichungen, wodurch die Werthe von p bestimmt werden.

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3.(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1).$
$(4-2)q + 5.(5-1).(5-2)r + \&c.$

$\delta - 7\gamma + 14\beta - 8\alpha = 3(3-1)(3-2)$
$(3-4)p + 5.(5-1).(5-2).(5-4)r + \&c.$

$\varepsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\beta + 40\alpha = 3(3-1).$
$(3-2).(3-4).(3-5)p + \&c.$

&c.

Wiederum die Gleichungen, wodurch q bestimmt wird

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5.(5-1)r + \&c.$

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p +$
$4(4-1)(4-2)q + 5(5-1).(5-2)r + \&c.$

$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)$
$(4-3)q + 5.(5-1).(5-2).(5-3)r + \&c.$

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = 4(4-1)$
$(4-2)(4-3)(4-5)q + \&c.$

&c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r bestimmt wird

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)$
$(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$

$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)$
$(4-3)q + 5(5-1)(5-2)(5-3)r + \&c.$

$\varepsilon - 10\delta + 35\gamma - 50\beta + 24\alpha = 5.(5-1)$
$(5-2)(5-3)(5-4)r + \&c.$

&c.

§. 54.

Aus diesen Gleichungen entstehet sodann beygefügte Tabelle.

§. 55.

Vergleicht man diese Tabelle mit der erstern (§. 36.) so ist sie davon nur in den Cubiczahlen verschieden, welche hier in den Nennern nicht vorkommen, und an deren Statt nur die ledigen Zahlen, oder die Cubicwurzeln, hier als Theiler erscheinen.

§. 56.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von beyden vorhergehenden ganz ähnlich. Es sey z. E. ABMP zu quadriren, und die Absciſſe AP in drey gleiche Theile getheilt; so haben wir $S = S'''$, demnach (§. 52.)

$\alpha = 3$
$\beta = \frac{9}{2}$
$\gamma = \frac{27}{3} = 9$

T 5 und

$+m=$	α	$\frac{2\alpha-\beta}{1}$	$\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{1.2}$	$\frac{24\alpha-26\beta+9\gamma-\delta}{1.2.3}$	$\frac{120\alpha-154\beta+71\gamma-14\delta+\varepsilon}{1.2.3.4}$	$\frac{720\alpha-1044\beta+580\gamma-155\delta+20\varepsilon-\zeta}{1.2.3.4.5}$	&c.
$-n=$	. .	$\frac{\alpha-\beta}{2.1}$	$\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{2.1.1}$	$\frac{12\alpha-19\beta+8\gamma-\delta}{2.1.1.2}$	$\frac{60\alpha-107\beta+59\gamma-13\delta+\varepsilon}{2.1.1.2.3}$	$\frac{360\alpha-702\beta+461\gamma-137\delta+19\varepsilon-\zeta}{2.1.1.2.3.4}$	&c.
$+p=$	. .	. . .	$\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{3.2.1}$	$\frac{8\alpha-14\beta+7\gamma-\delta}{3.2.1.1}$	$\frac{40\alpha-78\beta+49\gamma-12\delta+\varepsilon}{3.2.1.1.2}$	$\frac{240\alpha-508\beta+372\gamma-121\delta+18\varepsilon-\zeta}{3.2.1.1.2.3}$	&c.
$-q=$	. .	. . .	. . .	$\frac{6\alpha-11\beta+6\gamma-\delta}{4.3.2.1}$	$\frac{30\alpha-61\beta+41\gamma-11\delta+\varepsilon}{4.3.2.1.1}$	$\frac{180\alpha-396\beta+307\gamma-107\delta+17\varepsilon-\zeta}{4.3.2.1.1.2}$	&c.
$+r=$	. .	. . .	. . .	. . . . . .	$\frac{24\alpha-50\beta+35\gamma-10\delta+\varepsilon}{5.4.3.2.1}$	$\frac{144\alpha-324\beta+260\gamma-95\delta+16\varepsilon-\zeta}{5.4.3.2.1.1}$	&c.
$-s=$	. .	. . .	. . .	. . . . . .	. . . .	$\frac{120\alpha-274\beta+225\gamma-85\delta+15\varepsilon-\zeta}{6.5.4.3.2.1}$	&c.
&c.							

und aus der dritten Columne dieser Tabelle

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{2}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{6}$$

Setzt man in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ, so erhält man

$$m = \tfrac{9}{4}$$
$$n = 0$$
$$p = \tfrac{1}{4}$$

demnach, weil $n = 0$ wird,

$$S''' = \tfrac{1}{4} R''' + \tfrac{9}{4} R'$$

Man kann daher, so oft man sich mit einer Trisection der Abscisse begnügen will, das mittlere Rectangel weglassen, und schlechthin

$$ABMP = \tfrac{1}{4} ANMP + \tfrac{9}{4} A\nu\mu\pi$$

setzen.

§. 57.

Dieses Phänomenon, daß man nemlich eines von den Rectangeln gar nicht gebraucht, kömmt auch in andern Fällen vor. So z. E. wenn man sich mit der Bisection der Abscisse begnügt, hat man (§. 52. 54.) $S = S''$

$$\alpha = 2$$
$$\beta = \tfrac{4}{2} = 2$$
$$m = 2\alpha - \beta = 2$$
$$n = \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

folg-

folglich schlechthin

$$S'' = 2 R'.$$

§. 58.

Eben so wenn man die Abscisse in 4 Theile theilt, $S = S^{IV}$, und (§. cit.)

$$\alpha = 4$$
$$\beta = \tfrac{16}{2} = 8$$
$$\gamma = \tfrac{64}{3}$$
$$\delta = \tfrac{256}{4} = 64$$

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{3}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{4} = \tfrac{1}{3}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{9}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{24} = 0$$

demnach

$$S^{IV} = * \tfrac{8}{9} R''' - \tfrac{2}{3} R'' + \tfrac{8}{3} R'$$

§. 59.

Hingegen erhält man, wenn die Abscisse in fünf gleiche Theile getheilt wird

$$S^{V} = \tfrac{19}{144} R^{V} - \tfrac{25}{288} R^{IV} + \tfrac{25}{18} R''' - \tfrac{175}{144} R'' + \tfrac{425}{144} R'$$

wobey alle fünf Rectangel müssen berechnet werden.

§. 60.

§. 60.

Ueberhaupt betrachtet, sind diese Formeln weniger convergirend als diejenigen, so wir oben für den Fall der fünften Figur gefunden haben. Man hat den Grund davon darin zu suchen, daß hier in der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

die ersten zwey Glieder beybehalten werden. Da nun z. E. wenn man die Abscisse AP in drey Theile theilt, und dadurch

$$ABMP = \tfrac{1}{4} ANMP + \tfrac{9}{4} A\nu\mu\pi$$

erhält, (§. 56.) diese Formel eigentlich nur da nach aller Schärfe statt hat, wo

$$y = a + bx + cx^2$$

ist, so sieht man leicht, daß in jeden andern Fällen der Fehler, den man dadurch zuläßt, von den übrigen Gliedern

$$dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

herrührt, und in Absicht auf den Raum ABMP,

$$= \tfrac{1}{4} dx^4 + \tfrac{1}{5} ex^5 + \tfrac{1}{6} fx^6 + \&c.$$

ist. Daher muß auch die Abscisse $A\pi = x$ klein genug seyn, wenn man diesen Unterschied solle weglassen können. Da dieser Unterschied sich hier bey der vierten Dignität von x anfängt, so kömmt man den Wahren 16 mal näher, wenn x um die Hälfte kleiner angenommen wird.

§. 61.

§. 61.

Diese Formeln haben übrigens die Bequemlichkeit, daß man dadurch krumme Linien, so genau man will, quadriren kann, so bald sie construirt sind; und in soferne haben sie selbst auch in der practischen Geometrie ihren Nutzen, wo nicht selten Felder auszumessen vorkommen, deren Grenzlinien sich in die Krümme ziehen. Solche kann man nun in Segmente, dergleichen ABMP ist, eintheilen, und ihren Inhalt, vermittelst der Rectangel $A\mu$, Am, AM, bestimmen.

§. 62.

Man nimmt zu diesem Ende, wenn z. E. aq eine solche Linie ist, auf AQ, so viele gleiche Theile AB, BC, CD &c. man will, und richtet aus denselben Perpendiculairen Aa, Bb auf. Auf diese Art wird man, wenn man diese Theile zu 3 und 3 nimmt nach der Formel des §. 56. Fig. VII.

$$AadD = \tfrac{9}{4} AB.Bb + \tfrac{1}{4} AD.Dd = \tfrac{3}{4} AB(Dd + 3Bb)$$
$$DdgG = \tfrac{3}{4} AB(Gg + 3Ee)$$
$$GgkK = \tfrac{3}{4} AB(Kk + 3Hh)$$
$$KknN = \tfrac{3}{4} AB(Nn + 3Ll)$$
$$NnqQ = \tfrac{3}{4} AB(Qq + 3Oo)$$

daher den ganzen Inhalt

$$AaqQ = \tfrac{3}{4} AB(Dd + Gg + Kk + Nn + Qq) + \tfrac{9}{4} AB(Bb + Ee + Hh + Ll + Oo)$$

erhalten, welcher desto genauer seyn wird, von jewe-

jeweniger Graden die Krümmung der Bögen ab, bc, cd &c. ist.

§. 63.

Man erhält aber den Inhalt genauer, wenn man die Theile auf A Q zu 4' und 4 nimmt. Alsdann dient die Formel des 58 §. und es ist

$$AaeE = \tfrac{8}{3}AB.Bb - \tfrac{2}{3}AC.Cc + \tfrac{8}{3}AD.Dd$$
$$= \tfrac{4}{3}AB(2Bb - Cc + 2Dd)$$
$$EeiI = \tfrac{4}{3}AB(2Ff - Gg + 2Hh)$$
$$IiNn = \tfrac{4}{3}AB(2Kk - Ll + 2Mn)$$
&c.

daher der Inhalt

$$AanN = \tfrac{8}{3}AB(Bb + Dd + Ff + Hh + Kk + Mm) - \tfrac{4}{3}AB(Cc + Gg + Ll).$$

§. 64.

Will man den Inhalt noch genauer haben, so nimmt man die Theile auf A Q zu 5 und 5, und gebraucht die Formel des §. 59. Denn so wird

$$AafF = \tfrac{425}{144}AB.Bb - \tfrac{175}{144}.AC.Cc + \tfrac{25}{18}.AD.Dd - \tfrac{25}{288}AE.Ee + \tfrac{19}{144}.AF.Ff$$

oder

$$AafF = \tfrac{10}{288}AB(85.Bb - 70.Cc + 120.Dd - 10.Ee + 19.Ff)$$
$$FflL = \tfrac{10}{288}AB(85.Gg - 70.Hh + 120.Ii - 10.Kk + 19.Ll)$$
$$LlqQ = \tfrac{10}{288}AB(85.Mm - 70.Nn + 120.Oo - 10.Pp + 19.Qq)$$

seyn.

§. 65.

Man kann aber auch schlechthin nur die Puncte a, d, g, k, n, q durch gerade Linien zusammenhängen, welche sodann ein geradlinichtes Vieleck ausmachen, welches sich leicht berechnen läßt. Und so bleiben nur noch die Segmente zu berechnen, welche auf diesen Chorden stehen, und theils zu dem Vielecke addirt, theils subtrahirt werden müssen, je nachdem sie ausser- oder innerhalb demselben liegen. Es sey AmMnA ein solches Segment, so wird die Chorde AM mit der Höhe mn multiplicirt, und von dem Producte $\tfrac{2}{3}$ genommen, weil, wie wir oben (§. 23. 28.) gesehen haben, der Inhalt desto genauer $= \tfrac{2}{3}.AM.mn$ ist, je weniger der Bogen AmM von der Krümmung der denselben osculirenden Parabel abweicht. Fig. II.

§. 66.

Bey den bisher (§. 52 seqq.) betrachteten Formeln, haben wir noch immer gesetzt, daß die Abscissen von A gegen P gerechnet, und daher sämtlich positiv genommen werden. Nimmt man aber eben so viele negative Abscissen mit in die Rechnung, so wird diese ganz geändert, und man reicht damit doppelt weiter, weil man die gleichnahmigten Rectangel auf beyden Seiten in eines zusammen nehmen kann. Es sey z. E. das Segment P'M'MP zu quadriren, so wird die Abscisse P'P in 2, 4, 6, 8 rc. gleiche Fig. VI. Fig. VIII.

Theile getheilt, und aus den Theilungspuncten perpendiculaire Ordinaten aufgerichtet. Die mittlere dieser Ordinaten sey AB. Und die Abscissen werden von dem Punct A an gegen P und P' vor- und rückwerts gerechnet. Zieht man die Puncte $M' M$, $m' m$, $\mu' \mu$ durch gerade Linien zusammen, so ergeben sich die Trapeze $P' M' M P$, $p' m' m p$, $\pi' \mu' \mu \pi$, deren Inhalt der Summe zweyer gleichnahmigten Rectangel $AP' . P'M' + AP . PM$ &c. gleich ist.

§. 67.

Man setze nun wiederum $A\pi = x$, $\pi\mu = y$, und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

und nenne die Trapeze T', T'', T''' &c. die denselben entsprechende Segmente S', S'', S''' ꝛc. so findet man

$$T' = 2ax + 2cx^3 + 2ex^5 + 2gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$T'' = 4ax + 16cx^3 + 64ex^5 + 256gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$T''' = 6ax + 54cx^3 + 486ex^5 + 4374gx^7 + \text{ꝛc.}$$

&c.

$$S' = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$S'' = 4ax + \tfrac{16}{3}cx^3 + \tfrac{64}{5}ex^5 + \tfrac{256}{7}gx^7 + \text{ꝛc.}$$

&c.

wofür wir überhaupt

$$S = 2\alpha ax + 2\gamma cx^3 + 2\varepsilon ex^5 + 2\eta gx^7 + \text{ꝛc.}$$

setzen,

setzen, um auf eine allgemeine Art die Trapeze T', T'', T''' &c. mit jeden Segmenten vergleichen zu können.

§. 68.

Zu diesem Ende setzen wir wiederum

$$S = mT' + nT'' + pT''' + \&c.$$

und erhalten dadurch die Gleichungen.

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$
$$\eta = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{ꝛc.}$$

&c.

§. 69.

Hieraus erhält man folgende Tabelle, welche von derjenigen, so wir oben (§. 48.) aus ganz ähnlichen Gleichungen gefunden, nur darinn verschieden ist, daß in den Nennern statt der Cubiczahlen 1, 8, 27, 64 ꝛc. ihre Wurzeln 1, 2, 3, 4 ꝛc. vorkommen.

$+ m =$

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	...	$\frac{\alpha-\gamma}{2(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{2(4-1)(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{2.(4-1)(9-4)(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	...	...	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{3(9-1)(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{3.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	...	...	...	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{4(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 70.

§. 70.

Setzt man nun z. E. die Abscisse $P'P$ werde in 6 gleiche Theile getheilt, so haben wir $S=S'''$, und daher (§. 67.)

$$\alpha = 3$$
$$\gamma = \frac{27}{3} = 9$$
$$\varepsilon = \frac{243}{5}$$

und aus der dritten Columne dieser Tabelle

$$+m = \frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{24}$$
$$-n = \frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{30}$$
$$+p = \frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{120}$$

demnach

$$m = \frac{33}{20}$$
$$n = \frac{12}{25}$$
$$p = \frac{13}{100}$$

und

$$S''' = \frac{33}{20}T' + \frac{12}{25}T'' + \frac{13}{100}T'''$$

§. 71.

Da nun

$$T' = A\pi(\pi\mu + \pi'\mu')$$
$$T'' = 2A\pi(pm + p'm')$$
$$T''' = 3A\pi(PM + P'M')$$

ist, so ist der ganze Raum

$$P'M'MP = \frac{33}{20}A\pi(\pi\mu + \pi'\mu') + \frac{24}{25}A\pi(pm+p'm') + \frac{39}{100}A\pi(PM+P'M').$$

 Diese

Diese Formel fängt nun erst bey der siebenten Dignität des x an von dem wahren Inhalt des Segments P'M'MP abzuweichen.

§. 72.

Man kan aber das Convergiren dieser Formeln noch weiter treiben, weil sich der hier betrachtete Fall (§. 66. seq.) auf denjenigen reduciren läßt, den wir oben (§. 45. seq.) betrachtet haben. Es sey HKO eine jede krumme Linie, die Abscissen werden auf VR von A an vor- und rückwärts genommen, und die Ordinaten seyn auf denselben senkrecht. Man mache nun AR = AV, und indem man die Ordinaten VH, RO aufrichtet, und die Chorde HCO zieht, so ziehe man sodann hCo durch C mit VR parallel, so wird man auf diese Art die krumme Linie hBo construiren können, die ihren Scheitelpunct in B hat, deren Axe AB ist, und deren Theile auf beyden Seiten dieser Axe einander ähnlich sind, und so wird auch jeder Raum

Fig. IX.

$$VhBoR = VHBOR$$

seyn. Denn man setze jede Abscisse

$$AQ = x \qquad QN = y$$
$$AT = -x \qquad TL = \eta$$
$$Qn = Tl = z.$$

und $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$
so ist

$$\eta = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.$$

demnach

$$\frac{y+\eta}{2} = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Nun aber ist

$$\frac{y+\eta}{2} = \frac{QN+TL}{2} = Ac = Qn = Tl = z$$

demnach

$$z = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Da nun hier lauter gerade Dimensionen sind, so ist die Linie hBo auf beyden Seiten der Linie AB sich selbst ähnlich, — B ihr Scheitelpunct und BC ihre Axe. Ferner ist der Raum

$$ABNQ = \int y\,dx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$
$$ABLT = \int \eta\,dx = ax - \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 - \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$

folglich der ganze Raum

$$QNBLT = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \&c.$$

Eben diese Reihe findet sich aber auch für den Raum QnBlT, demnach sind diese beyden Räume einander gleich. Es ist daher gleichviel, ob man VHBOR oder VhBoR quadrirt. Nun läßt sich das Rectangel VhoR für sich berechnen, demnach hat man nur noch das Segment hCoBh zu quadriren, und für dieses hat man die Gleichung

$$z - a = cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

welche eben die ist, die wir bey dem oben (§. 45. seqq.) betrachteten Fall zum Grunde leg-

legten. Es wird demnach hiedurch ihr Gebrauch vollends allgemein gemacht.

§. 73.

Wenn es hiebey nur darum zu thun ist, das Segment HBOCH zu quadriren, so wird die Lage der Abscissenlinie gleichgültig, und man thut dabey am besten, wenn man sie mit der Chorde HO parallel zieht, oder die Abscissen selbst auf dieser Chorde von dem Mittel C gegen O und H gerechnet nimmt, und die Ordinaten senkrecht aufrichtet. Dadurch erhält man den Vortheil, daß das Segment hBoCh sowohl länger als schmähler, und daher aus beyden Gründen die Krümmung des Bogens hBo vermindert wird. Ich werde mich aber nicht länger hiebey aufhalten, sondern diesen Betrachtungen noch einige andere beyfügen, welche die durch Näherung zu bestimmende Rectification und Quadratur des Circuls besonders betreffen.

§. 74.

Fig. XI. Es sey AMNB ein halber Circul, und man habe die Länge des Bogens AM zu bestimmen. Zu diesem Ende richte man auf AB die Tangente AQ senkrecht auf, und trage den dritten Theil des Bogens AM aus B in N. Man ziehe sodann durch NM eine gerade Linie bis in Q, so wird AQ der Länge des Bogens AM desto näher kommen, von jewenigern Graden derselbe ist.

§. 75.

§. 75.

Um dieses zu beweisen, setze man den Halbmesser $AC = 1$, den Winkel $NCB = \omega$, so ist

$$MCA = 3\omega$$
$$CMN = CNM = 2\omega$$
$$CFN = \omega,$$

demnach

$$CF = 2\cos.\omega$$
$$AF = 1 + 2\cos.\omega.$$

Nun ist

$$AQ = AF.\tang.\omega$$

folglich

$$AQ = (1 + 2\cos.\omega)\tang.\omega = \tang.\omega + 2\sin.\omega.$$

Man kann demnach aus dem §. 11. sehen, wie dieser Werth dem wahren Werthe des Bogens näher kömmt. Oder da

$$\tang.\omega = \omega + \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{2}{15}\omega^5 + \tfrac{17}{315}\omega^7 + \&c.$$
$$2\sin.\omega = \omega - \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{1}{60}\omega^5 - \tfrac{1}{2520}\omega^7 + \&c.$$

folglich

$$AQ = 3\omega * + \tfrac{3}{20}\omega^5 - \tfrac{3}{56}\omega^7 + \&c.$$

ist, so sieht man hieraus, daß AQ von der wahren Länge des Bogens AM erst in der fünften Dignität von ω anfängt verschieden zu seyn, oder daß

$$AQ - AM = \tfrac{1}{1620}AM^5 - \tfrac{1}{41824}AM^7 + \text{rc.}$$

ist.

§. 76.

Man kommt aber der Wahrheit ungleich näher, wenn man auf folgende Art verfährt: Es sey AMB ein halber Circul, und die Länge des Fig. XII.

 des

des Bogens A M zu suchen. Zu diesem Ende richtet man A Q auf A B senkrecht auf, und ziehe aus M den Sinus M P. Man theile A P in 5 gleiche Theile, und trage C e aus B in E. Wird nun durch E und M eine gerade Linie E M Q gezogen, so wird A Q noch genauer, als vorhin, der Länge des Bogens gleich seyn. Denn setzt man $AC = CB = BD = 1$, $AM = \varphi$, so ist

$$CP = \text{cos.}\,\varphi, \quad PM = \text{sin.}\,\varphi$$
$$AP = (1 - \text{cos.}\,\varphi)$$
$$ED = \tfrac{1}{5}AP = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}\,\text{cos.}\,\varphi$$
$$BE = \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{cos.}\,\varphi$$
$$PE = \tfrac{9}{5} + \tfrac{6}{5}\,\text{cos.}\,\varphi$$
$$AE = \tfrac{14}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{cos.}\,\varphi.$$

Da nun

$$AQ = \frac{PM.AE}{PE}$$

ist, so ist

$$AQ = \frac{(14 + \text{cos.}\,\varphi)\,\text{sin.}\,\varphi}{9 + 6\,\text{cos.}\,\varphi} = \frac{28\,\text{s.}\,\varphi + \text{s.}\,2\varphi}{18 + 12\,\text{cos.}\,\varphi}$$

Da nun

$$\text{sin.}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{2.3}\varphi^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{rc.}$$
$$\text{sin.}\,2\varphi = 2\varphi - \frac{8}{2.3}\varphi^3 + \frac{32}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{rc.}$$
$$\text{cos.}\,\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2.3.4}\varphi^4 - \text{rc.}$$

ist, so findet sich, wenn man diese Reihen in der Formel AQ setzt, und die Theilung vornimmt

$$AQ =$$

$$AQ = v - \tfrac{1}{2700}v^7 + \text{rc.}$$

so, daß also der Unterschied zwischen A Q und dem Bogen A M sich erst in der 7ten Dignität des Bogens zu äussern anfängt. Und wenn auch der Bogen $v = 1$ wird, so ist dieser Unterschied dennoch nur $\frac{1}{2700}$ Theil des Halbmessers. Nimmt man aber den Bogen um die Hälfte kleiner, so wird der Fehler bey jeder Bisection 128 mal geringer. Wenn demnach die Länge eines Circulbogens durch Construction zu bestimmen ist, so ist die hier angegebene so leicht und so genau man es verlangen kann.

§. 77.

Werden aber die beyden erst angegebene Constructionen mit einander verglichen, so findet sichs ohne Mühe, daß auch bey der letztern Construction der Bogen BN von dem dritten Theile des Bogens A M gar unmerklich verschieden ist, und daß man folglich dadurch einen Bogen sehr genau in 3 Theile theilen kann. Denn wenn je der Bogen A M gar zu groß ist, so darf man nur denselben halbiren, und den dritten Theil von seiner Hälfte suchen, und diese sodann verdoppeln.

X.
Anmerkungen und Zusätze zur Gnomonic.

§. 1.

Tab. III. IV. V. Man wird nicht leicht eine Wissenschaft finden, die in so viele verschiedene Formen gebracht, und auf so unzählig mannigfaltige Art angewandt worden, als die Gnomonic. Man kann anstehen, ob es möglich sey, eine Art von Sonnen-Uhren zu erdencken, die nicht schon irgend beschrieben und angebracht worden wäre. Selbst auch die Methode, jede Sonnenuhr zu zeichnen, und die dazu dienlichen Instrumente und Tabellen sind eben so häufig als mannigfaltig. Es scheint daher daß, was man noch etwann darüber erfinden kann, schlechthin nur eine Nachlese ist, und daß man alle über die Gnomonic herausgekommene Schriften müsse durchgangen haben, wenn man sich berechtiget achten will, es eine Nachlese zu nennen.

§. 2.

Betrachtungen von dieser Art, bothen sich mir bey dem Entschlusse an, hier einige Anmerkungen über die Gnomonic zu liefern. Ich habe lange nicht alle Schriften über diese Wissenschaft gelesen, und in soferne muß ich unentschieden lassen, ob, was ich hier vortragen werde, durchaus neu sey oder nicht. Ich kann aber darauf zählen, daß sich viele meiner Leser in eben dem Fall befinden, und daß es folglich denseben so gut neu seyn werde, als es mir ware, da ich darauf verfiele. Verschiedenes davon wird dienen zu zeigen, daß öfters die ersten Erfinder zufrieden sind, wenn sie etwas finden.

I. Anmerkungen über die Azimuthaluhren.

§. 3.

Die Azimuthaluhren sind vielleicht zuerst erfunden, und zuletzt berichtigt worden. Ich will sagen, der erste, der sich in Sinn kommen liesse, die Zeit nach dem Schatten der Sonne zu messen, steckte etwan einen Stab gerade aufgerichtet in die Erde, beschrieb einen Circul darum, und theilte denselben, so gut er es verstunde, in Stunden, und vermuthlich machte er jede Stunde gleich groß. Von diesem ersten Anfange an, bis zu der Bemerkung, daß man die Stunden ungleich machen, und sie entweder von Tag zu Tag ändern, oder dem Zeiger eine schiefe mit der Weltaxe parallele Lage geben müsse, war noch sehr weit, und es musten vorerst die Gründe der spährischen Astronomie erfunden werden, welche sodann zeig-

zeigten, daß man nicht bey Azimuthaluhren, sondern bey Aequinoctialuhren den Anfang machen müsse.

§. 4.

Indessen muß man doch sagen, daß der erste Einfall, die Zeit nach dem Schatten eines aufrechtstehenden Stabes zu messen, auf die genaueste Sonnenuhr führte, weil in der That die Azimuthaluhren allein von den Anomalien der Refraction frey sind. Da sich aber die Stundenwinkel davon beständig ändern, so haben sie die Unbequemlichkeit, daß man entweder einen Calender dabey anbringen, oder den Zeiger beweglich machen muß, und auch in dem letztern Fall wird der Calender dabey nothwendig. Man hat daher diesen vorgezogen, und die Azimuthaluhr dergestallt zeichnen
Fig. I. gelehrt, daß die Stunden in der Ellipse ADBE herum liegen, der Zeiger aber auf der Linie Gg, als der kürzern Axe der Ellipse, hin und her geschoben wird. Die Methode, sowohl die Ellipse als den Calender in Gg zu zeichnen, findet sich in mehreren gnomonischen Schriften. Sie wird aber darin nur als eine Azimuthalsonnenuhr beschrieben, und weder durch die Eigenschaften der Ellipse kenntlicher, noch durch andere dabey mit vorkommende Umstände, brauchbarer gemacht. Hierin besteht nun meine Nachlese, und die Zeichnung der Uhr wird sich folgender massen angeben lassen:

§. 5.

§. 5.

Machet den Winkel DFC so groß als die Polhöhe des Ortes, für welchen die Uhr dienen solle, und nachdem ihr DF willkührlich angenommen, so ziehet DC aus D auf FC senkrecht. Traget DF aus C in A und B, und machet CE = CD, so ist AB die grössere, DE die kleinere Axe, und F der Brennpunct der Ellipse ADBE. Traget CF in Cf, so ist f der andere Brennpunct. Machet ferner jeden Winkel GfC der Declination der Sonne gleich, so wird sich auf Gg der Thierkreis oder der Calender zeichnen lassen. Endlich machet jeden Winkel DCK dem Stundenwinkel, und CK der halben Axe CB gleich, und fället aus K die Perpendiculair KP auf AB, so wird H der Punct seyn, wo die Stunde muß hingeschrieben werden. Und wenn die Declination der Sonne = GfC ist, so ist DGH das Azimuth der Sonne zu der Stunde H. DE ist die Mittagslinie, D liegt gegen Mitternacht, und der Zeiger wird in G aufgerichtet. Ferner ist für eben den Tag jede Linie GH allemale dem Cosinus der Sonnenhöhe gleich, und wird aus G die Normallinie GL auf die Ellipse gezogen, so zeigt sie die Stunde des Aufganges der Sonne, so wie die andere Normallinie Gl die Stunde des Niederganges bezeichnet, und zugleich der Halbmesser des Circuls ist, auf welchem GH den Cosinus der der Sonnenhöhe giebt. Auf eben diesem Circul

cul ist CK der Cosinus der Declination der Sonne.

§. 6.

Der Beweis von allen diesen Sätzen wird nicht schwer, wenn man sich die ganze Figur als eine ortographische Projection der Sphäre vorstellt. Man fälle nemlich aus jeden Puncten des Parallelkreises der Sonne, Perpendiculairen auf die Fläche des Horizontes, so bezeichnen diese die Ellipse ADBE. Der Diameter AB behält seine Länge, welche den doppelten Cosinus der Declination gleich ist. Hingegen wird DE in Verhälniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe verkürzt. Und dieses ist der Grund, warum der der Polhöhe gleich gemachte Winkel DFC in den Brennpunct F trift. Denn FD ist in der Ellipse allemal = AC = CB, und so wird hier CB: CD = FD:CD = 1 : sin. eleu. poli. Fällt man ferner aus dem Scheitelpunt der Sphäre eine Perpendiculairlinie auf den Horizont, so trift diese in G. Hingegen ist C die Projection desjenigen Punctes der Weltaxe, welcher in der Fläche des Parallelkreises der Sonne liegt, und von dem Mittelpunct der Sphäre um den Sinus der Declination entfernt ist. Da dieser Mittelpunct in G fällt, so ist GC die Projection von diesem Sinus der Declination, und wegen der schiefen Lage der Weltaxe im Verhältniß des Halbmessers zum Cosinus der Polhö-

Polhöhe verkürzt. GH ist für jede Stunde die Projection des Sinus des Abstandes der Sonne vom Scheitelpunct, und folglich des Cosinus der Sonnenhöhe. Diese Linie hat in der Lage GL, Gl ihre beyden Maxima; und L, l sind die Projection der Puncte, wo der Parallelkreis der Sonne den Horizont durchschneidet. Nimmt man demnach GL = 1 an, so ist CB der Cosinus der Declination, CF = Cf im Verhältniß des Cosinus der Polhöhe kleiner, und CG in Verhältniß der Tangente der Declination kleiner als CF, folglich in zusammengesetzter Verhältniß der Tangente und des Cosinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe kleiner als CL = 1, demnach in Verhältniß des Sinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe. Hieraus ergiebt sich, warum der Calender in G g aus dem Brennpunct f kann verzeichnet werden. Endlich ist CP allemal die Projection des Sinus des Stunden-Bogens, welcher, wenn CK = CB als Halbmesser angenommen wird, dem Winkel DCK gleich wird.

§. 7.

Die erst angegebene Verzeichnung der Azimuthaluhren hat für diejenigen, welche die Ellipsen aus der höhern Geometrie kennen, etwas geschmeidiges, wodurch sie faßlicher wird. Der Gebrauch des Brennpuncts wird dadurch merkwürdig, daß er sowohl die Polhöhe DFC als

als die Declination der Sonne GfG, und damit den auf Gg gezeichneten Calender bestimmen hilft. Es ist ferners merkwürdig, daß die aus jedem Punct G auf die Ellipse gezogene Normallinien GL, Gl die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne angeben. Es ist unnöthig hier mit anzumerken, daß die Puncte L, F, G, f, l sämtlich in dem Umkreise eines Circuls liegen, weil dieses aus dem, daß GL, Gl Normallinien sind, für sich folgt. Da man aber, um diesen Circul zu ziehen, nur drey Puncte nöthig hat, so kann man die Puncte L, l bestimmen, wenn man den Circul durch f, G, F zieht; und hinwiederum wird G bestimmt, wenn der Circul durch L, F, G gezogen wird. Im ersten Fall findet man aus der Declination die Länge des Tages LADBL, im andern aus der Länge des Tages die Declination. Endlich ist hiebey merkwürdig, daß diese Azimuthaluhr, vermittelst der Linie GH, nicht nur die Stunde H, und ihr Azimuth DGH angiebt, sondern ihre Länge selbst den Cosinus der Sonnenhöhe vorstellt, wenn GL zum Halbmesser angenommen wird.

§. 8.

Es kömmt aber bey dieser Azimuthaluhr noch ein anderer Umstand vor, welcher unerwarteter ist. Man darf nemlich nur setzen, daß AC die Mittagslinie sey, und über derselben einen Zeiger aus C aufrichten, welcher mit derselben

derselben einen Winkel mache, der der Polhöhe DFC gleich sey, so wird, wenn man in A 12 Uhr schreibt, und so die Stunden ändert, die Uhr eine Horizontaluhr für eben die Polhöhe seyn, für welche sie vorhin eine Azimuthaluhr war. Denn bey den Horizontaluhren sind die Tangenten der Stundenwinkel in der Verhältniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner als die Tangenten der Stundenbögen. Es sey demnach jeder Stundenbogen =KCB, seine Tangente =KP, wenn man nemlich CP als einen Halbmesser ansieht. Da nun PH in der Verhältniß von FD zu CD, oder des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner ist als PK, so ist PH die Tangente des Stundenwinkels der Horizontaluhr, und folglich HCB der Stundenwinkel selbst.

§. 9.

Ungeachtet aber die Ellipse ADBE eben so wohl zu einer Azimuthaluhr als zu einer Horizontaluhr gebraucht werden kann; so macht dennoch die verschiedene Lage der Mittagslinie, als welche im ersten Fall die kürzere, im andern Fall aber die längere Axe ist, daß man sie nicht zugleich zu beyden Absichten gebrauchen kann, wenn man sich des Schattens beyder Zeiger bedienen will. Will man aber an dem Zeiger der Azimuthaluhr, welcher auf der Linie Gg senkrecht steht, einen gleichfalls aufrechtstehenden Spiegel befestigen, so, daß derselbe mit beyden Axen

Axen der Ellipse einen Winkel von 45 Graden mache, so wird der, vermittelst des Spiegels, reflectirte Schatten des Azimuthalzeigers, die Stunden von D an gerechnet, eben so zeigen, wie der auf CB stehende Zeiger der Horizontaluhr die Stunde, von B an gerechnet, weisen wird, wenn die längere Axe in der Mittagslinie liegt. In jeder andern Lage treffen beyde Stunden nicht zusammen. Man hat sich auch dieses Umstandes längst schon bedient, um durch die Vereinigung der Azimuthal- und Horizontaluhren die Lage der Mittagslinien zu finden, dabey aber jede Uhr besonders verzeichnet. Läßt sich aber der Spiegel gut anbringen, so gebraucht es, nach der hier angegebenen Methode, dieser gedoppelten Zeichnung nicht, weil man bey der Ellipse ADBE bleiben, und schlechthin nur die Zahlen, sowohl von D als von B an gerechnet, herum schreiben darf.

II. Bestimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne.

§. 10.

In den Anweisungen zur Gnomonic begnügt man sich mehrentheils die Verfertigung der Sonnen-Uhren, und etwann auch der Mond- und Sternuhren anzugeben, das will sagen, man macht die Bestimmung der Zeit darin zur Hauptabsicht; und dieses hat allerdings seine gute Gründe, weil man den übrigen Umständen seltener als der Zeit nachfragt. Indessen hat die Bestimmung des Azimuth, und folglich der Mittagslinie, noch genug Erhebliches, daß man die dazu dienlichen Mittel vervielfältigen sollte. In der Gnomonic selbst kömmt die Frage von Bestimmung der Mittagslinien bey den meisten Sonnenuhren vor. In der practischen Geometrie kann sie ebenfalls sehr gute Dienste leisten; und bey der Schiffahrt wird sie unentbehrlich. Da das Azimuth am unmittelbarsten aus der Höhe der Sonne gefunden wird, so werde ich einige darüber angestellte Untersuchungen hier mit anbringen.

§. 11.

Es ist unnöthig aus dem vorhingesagten zu wiederholen, daß die erstbeschriebene Azimuthaluhr dazu dienen kann, sofern man GL, als den Sinus totus, und GH als den Cosinus der Sonnenhöhe ansieht, (§. 5.) und sofern Gl, GL das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne ist. Es ist vielmehr die Frage, das Azimuth unmittelbar auf den Quadranten zu verzeichnen, mit welchem die Höhe der Sonne gemessen wird. Dazu dienen nun folgende Betrachtungen:

§. 12.

Es sey HZON der Mittagskreiß, HCO der Horizont, GCF der Aequator, KSI ein Fig. II.

ein Parallelkreiß des Aequators, S der Ort der Sonne, SZ ihr Abstand vom Zenith, SP ihr Abstand vom Pole, SPZ der Stunden-Winkel, SZI der Azimuthalwinkel. Man setze:

$$PZ = e$$
$$PS = c$$
$$ZS = k$$
$$PZS = a$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung:

$$\cos c = \cos e . \cos k + \sin e . \sin k . \cos a$$

oder wenn man durch sin. k dividirt

$$\cos c . \mathrm{cosec}\, k = \cos e . \cot k + \sin e . \cos a.$$

§. 13.

Fig. III. Da wir den sphährischen Triangel PSZ in einen geradlinichten verwandeln, in welchem e ein Winkel werde, so seyn in dem geradlinichten Triangel $\alpha\ \varepsilon\ \beta$ vier auf einander folgende Stücke, nemlich die Winkel δ, ε und die Seiten α, β; so wird die Verhältniß dieser vier Stücke durch die Gleichung

$$\alpha\ \mathrm{cosec}\, \varepsilon = \beta . \cot \varepsilon + \beta . \cot \delta$$

ausgedrückt. Wird diese Gleichung mit der letztern des vorhergehenden §. verglichen, so läßt sich

$$\mathrm{cosec}\, \varepsilon = \mathrm{cosec}\, k$$
$$\cot \varepsilon = \cot k$$

demnach

$$\varepsilon = k$$

setzen.

setzen. Dadurch aber wird

$$\alpha = \cos c$$
$$\beta = \cos e$$

und da nun nur noch

$$\beta \cot \delta = \sin e . \cos a$$

bleibt, so findet sich

$$\cot \delta = \frac{\sin e . \cos a}{\beta} = \tang e . \cos a$$

Und auf diese Art sind die vier Stücke $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ des geradlinichten Triangels durch die vier Stücke k, c, e, a des sphärischen Triangels dergestalt bestimmt, daß die Seite k des letztern im erstern der Winkel ε wird. Es ist demnach in dem geradlinichten Triangel der Winkel ε das Complement der Sonnenhöhe, die Seite β der Sinus der Polhöhe, die Seite α der Sinus der Declination. Und da

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

ist, so ergiebt sich hieraus, daß der Winkel δ dem Bogen NL gleich ist. Denn der Triangel LGN ist in G rechtwinklicht, und

$$GN = 90° - e$$
$$GNL = a$$

demnach

$$\cos a = \cot e . \cot NL = \cot e . \cot \delta$$
$$d = NL.$$

§. 14.

Wir führen diesen letztern Umstand nur an, um zu zeigen, daß der Winkel δ auch auf der

Sphäre eine Bedeutung hat. Es ist aber zu unserm Vorhaben genug, wenn wir aus der Gleichung

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

die Anmerkung ziehen, daß sich der Winkel δ schlechthin nach dem Azimuth a verändert, und daher beständig ist, so lange man bey einerley Azimuth bleibt. Da nun die demselben gegenüberstehende Seite $\epsilon = \cos e$ durchaus beständig ist, so wird der Punct δ allemal in dem Umkreise des Circuls $\epsilon\,\delta\,\gamma$ liegen, und auf diese Art wird α durch ϵ, oder hinwiederum ϵ durch α bestimmt. Es ist demnach nur die Frage, diesen Circul für jedes Azimuth zu bestimmen. Dieses wird nun am leichtesten geschehen, wenn wir den Winkel ϵ rechtwinklicht nehmen.

§. 15.

Fig. IV. Es sey demnach AC zu AB wie der Sinus totus zur Tangente e, und A ein rechter Winkel. Ferner sey für jedes Azimuth

$$AB : AD = 1 : \cos a$$

so wird

$$AC : AD = 1 : \tang e . \cos a = 1 : \cot \delta$$

demnach

$$\delta = CDA$$

seyn. Man halbire DC in E, und aus E beschreibe man mit dem Halbmesser ED den Bogen ADC, so ist dieses der für das Azimuth a gesuchte Bogen. Nimmt man nun jedes Azimuth

muth von 10 zu 10 Graden, so werden die denselben entsprechende Bögen auf eben die Art beschrieben, wie sie die Figur vorstellt. Zieht man durch E eine Parallele HEG mit AB, so liegen alle Mittelpuncte auf HG, und es ist für jedes Azimuth

$$HF : EF = 1 : \cos a.$$

§. 16.

In dieser Figur ist nun

$$AC = \epsilon = \cos e$$

folglich

$$CB = CM = \sin. \text{tot.}$$

ferner jede Linie

$$Cd = \cos c = \alpha$$
$$dCA = k$$
$$dCK = 90^\circ - k$$

und der Circul ADdC zeigt das dazu gehörige Azimuth an.

§. 17.

Daferne das auf diese Art zu verfertigende Instrument nur für die Sonnenhöhen und deren Azimuthe dienen solle, so gebraucht man nicht die gantze Figur, sondern man macht CL dem Sinus der grösten Declination der Sonne gleich; und indem man aus C den Bogen Ll beschreibt, so ist der Theil LlC alles, was man von der Figur gebraucht. Auf CL werden aus C die Sinus der Declination für jede Grade der Ecliptic getragen, und mit

Ll concentrische Bögen aus C beschrieben. Wo nun diese Declinationsbögen die Azimuthalbögen durchschneiden, da ergiebt sich zugleich die dazu gehörende Höhe der Sonne durch den Winkel, den die aus C in diese Durchschnittspuncte gezogenen Linien mit CK machen. Die fünfte Figur stellt einen solchen für die Grade der Ecliptic verzeichneten Azimuthalquadranten grösser und deutlicher vor, und die Verzeichnung auf eine bloß practische Art vorgetragen, ist folgende.

§. 18.

Fig. V. Nach einer beliebig angenommenen Scale mache man CF dem halben Sinus der Polhöhe, FH dem halben Cosinus derselben gleich und den Winkel F von 90 Graden. Sodann sehe man FH als einen Halbmesser an, und trage auf denselben aus F gegen H und G alle Sinus des Azimuth, von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5, oder, wie es in der Figur geschehen, von 10 zu 10 Graden, so hat man eben so viele Mittelpuncte, aus welchen man durch C eben so viele Circulbogen zieht, und auf dieselbe die Grade des Azimuth von Mittag und von Mitternacht an gerechnet, zeichnet. Der Winkel HCN wird von 90 Graden gemacht, und so erhält man NCL die gantze Oefnung, so der Quadrant haben muß. Ferner mache man CL dem Sinus der grösten Declination der Sonnen gleich, und beschreibe aus

aus C den äussersten Bogen LKN, welcher sodann in Grade getheilet wird, die von K aus vor- und rückwärts gezählet werden, so, daß der 90ste Grad in L falle. Sodann werden auf CL aus C die Sinus der Declination von allen Graden der Ecliptic aufgetragen, oder welches einerley ist, man sieht CL als einen Halbmesser an, und trägt alle Sinus darauf, oder man fällt aus jeden Grade des Bogens LK Perpendicularen auf CL, und schreibt die nördliche Zeichen des Thierkreyses da, wo die Sinus ihrer Declination hinfallen. Auf CN werden auf gleiche Art die südlichen Zeichen geschrieben. Die Dioptern werden auf CL angemacht, so, daß für die nördliche Zeichen C, für die südlichen L gegen die Sonne gerichtet wird. Den in C angemachten Faden CP mit dem Gleichgewichte P und der daran beweglichen Perle p, läßt man frey herunter hängen, nachdem man denselben anfangs auf CL, oder CN gelegt, um die Perl auf den Ort der Sonne zu schieben. Auf diese Art wird z. E. wenn die Sonne im 23sten Grad ♉, oder 7 Grad ♌ und 20 Grad hoch ist, die Perl in p seyn, und den 95sten Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, oder auf den 85sten Grad von Mitternacht an gerechnet, anzeigen. Wäre bey gleicher Höhe der Sonne eben die Declination südlich, so würde die Perl in q auf den 21sten Grad von Mittag, oder auf den 159sten Gr. von Mitternacht an gerechnet,

 fallen.

fallen. Will man aber den Quadranten feste stellen, und die Diopter anstatt des Fadens, auf ein bewegliches Lineal bringen, so muß CK immer horizontal liegen, und die auf CL, CN geschriebene Grade und Zeichen werden auf das Lineal gezeichnet.

§. 19.

Wer leicht einige gnomonische Schriften gelesen hat, wird ohne Mühe auf die Anmerkung fallen, daß man längst schon einen Quadranten von dieser Art gesucht hat, auf welchem die hier verzeichneten Azimuthalbögen, Stundenbögen wären, und zwar mit dem Bedinge, daß es Circulbögen blieben. Denn wenn man andere krumme Linien dazu gebrauchen will, so lassen sich unzählige dergleichen verzeichnen. Man findet auch hin und wieder solche Quadranten beschrieben, wo man mit Hindansetzung der geometrischen Schärfe Circulbögen dazu gebraucht. Mit geometrischer Schärfe läßt sich eben dieser Azimuthalquadrant dazu gebrauchen, wenn man die Declination und die Sonnenhöhe verwechselt. Man nimmt nemlich die Declination auf dem Bogen KL, oder KN, und den Sinus der Sonnenhöhe auf CL, oder CN, und verwandelt die Grade des Azimuth, so die Perl anzeigt, in Stunden, indem man sie durch 15 theilt. So z. E. wenn man setzt, die Declination sey 20 Grad nördlich, die Sonnenhöhe $18\frac{1}{2}$ Grad, so wird die Perl,

Perl, wie vorhin, in p seyn, und von Mittag an gerechnet 95 Grad, oder, durch 15 getheilt, 6 St. 20 Min. angeben, welches Nachmittags-Stunden sind. Theilt man aber die von Mitternacht an gerechnete 85 Grad durch 15, so erhält man 5 St. 40 Min. welches Vormittags-Stunden sind.

§. 20.

Der Grund, warum diese Verwechselung angeht, ist, weil man in beyden Fällen in dem Triangel PZS drey Seiten und einen Winkel hat. Fig. II. Der Quadrant ist für den Azimuthalwinkel Z construirt. Will man statt dessen den Stundenwinkel P nehmen, so steht diesem nicht mehr die Seite PS, sondern die Seite ZS gegenüber. Demnach müssen diese Seiten verwechselt werden. Da die Seite PZ an beyden Winkeln liegt, so bleibt sie in beyden Fällen unverändert. Da übrigens die Scale CL nur bis auf $23\frac{1}{2}$ Grad geht, so Fig. V. sieht man leicht, daß sie nicht für alle Sonnenhöhen dient, und daß man folglich dieselbe bis auf den Sinus der grösten Sonnenhöhe verlängern müsse.

§. 21.

Ich werde mich aber dabey nicht länger aufhalten, sondern vielmehr die Anmerkung machen, daß alle die gnomonische Instrumente, wobey das, was man sucht, auf einer ganzen Fläche

Fläche herum getragen und gesucht werden muß, auf eine solche Art ins weitläuftige fallen, daß man, so sinnreich sie auch ausgesonnen sind, statt derselben, mit gutem Grunde, einfachere wünschen kan. So z. E. fällt das Geschmei- Fig. I. dige der Azimuthaluhr der ersten Figur in die Augen. Die Stunden liegen auf einer einigen Linie herum, und der Zeiger wird auch nur auf der Linie Gg, als auf einer ganz einfachen Scale auf den Ort der Sonne gestellt. Ich habe daher auf Mittel gedacht, bey den Quadranten eben solche Abkürzungen und Geschmeidigkeiten zu erhalten, und werde nun das, so ich für das Azimuth gefunden, folgender massen vortragen.

§. 22.

Fig. II. Da die Sonnenhöhe, deren Complement der Bogen ZS ist, auf dem Quadranten durch einen Winkel vorgestellt und gemessen wird, so habe ich nach den bekannten trigonometrischen Regeln den Triangel ECA genommen, dessen drey Seiten ihre Pole in den Ecken P, Z, S haben. Hier ist nun

ECA die Höhe des Aequators = e
CEA das Complement der Sonnenhöhe = k
CAM das Complement der Declination = c
EC das Complement des Azimuth = 180° − a
CA der Stundenbogen = SPZ.

Nun war es die Frage, den Triangel AEC dergestalt zu proiiciren, daß das Auge in dem Nadir

Nadir des Puncts E und die Tafel auf der aus dem Auge in E gezogenen Linien senkrecht war. Man weiß, daß auf diese Art die Bögen EC, EA durch gerade Linien vorgestellt werden, deren Länge den Tangenten der Hälfte dieser Bögen gleich ist, daß der Winkel E bleibt, und AC durch einen Circulbogen vorgestellt wird, welcher die Linien EC, EA unter den Winkeln A, C schneidet.

§. 23.

Man mache demnach den Winkel Fig. VI.

AEC = k
EC = tang $\frac{1}{2}$ a
EQ = cot a
CQR = 90 Gr.
QCR = 90 − c

aus R beschreibe man den Bogen CAM, so wird der Winkel

ACE = e
MAE = c

und EAE der Declination der Sonne gleich seyn.

§. 24.

Nun ist

QC = cot a + tang $\frac{1}{2}$ a = cosec a

demnach

QE : QC = cot a : cosec a = cosin a

Nimmt man folglich QC und damit den ganzen Triangel QCR und den Bogen CM als bestän-

beständig an, und betrachtet QC als einen Halbmesser, so ist QE der Cosinus des Azimuth, und auf diese Art können die Azimuthe auf die Linie QC getragen werden. Da der Winkel AEC = k dem Abstand der Sonne vom Scheitelpunct gleich ist, so bleibt QC in allen Fällen vertical, und AE ist immer nach der Sonne gerichtet, und schneidet auf EC die Grade des Azimuth ab. Macht man demnach in R ein bewegliches Lineal AR, und auf denselben in A ein ander bewegliches Lineal AE mit Diogtern an, so muß der Winkel EAR immer der Declination der Sonne gleich gemacht, und so befestigt werden. Sodann dreht man den ganzen Winkel oder die beyden Lineale EAR bis AE gegen die Sonne gerichtet ist, so wird AE das Azimuth in E auf der Scale CQ abschneiden.

§. 25.

Nach dieser Anleitung läßt sich das Instrument aus zween Sectoren so verfertigen, wie
Fig. VII. es die 7te Figur vorstellt. Der erste Sector NRCM hat einen Bogen NMC, welcher doppelt so groß als die Höhe des Aequators ist. Die Chorde dieses Bogens NQC wird als ein Diameter angesehen, und die Sinus versus jeder Graden aus C gegen N getragen, und die Grade dazu hingezeichnet, welche sodann jede Azimuthe, von Mittag an gerechnet, vorstellen. Der andere Sector RDAF hat einen Bogen,

der doppelt so groß als die Obliquität der Ecliptic ist. Die Linie AR theilt denselben in zween gleiche Theile, und ist von gleicher Länge wie der Halbmesser des ersten Sectors. A ist der Mittelpunct, aus welchem die Bögen DF beschrieben, und auf welche die Grade der Declination aufgetragen werden. Dieser zweyte Sector dreht sich in R um das Centrum des erstern, hingegen wird in seinem Centro A das Lineal AB angemacht, und mit Diooptern versehen, welche mit der Linie AB parallel sind.

§. 26.

Solte nun damit das Azimuth der Sonne gefunden werden, so wird das Instrument in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß die Chorde NC vertical stehe. Das Lineal AB wird in B auf den Grad der Ecliptic gedreht, in welchem die Sonne ist. Sodann dreht man den Sector ADRF bis die Diooptern gegen die Sonne gerichtet sind, so wird die Schärfe des Lineals AB auf der Chorde NQC das Azimuth der Sonne abschneiden, die Höhe der Sonne selbst aber wird MRA + BAR seyn.

§. 27.

Man thut hiebey wohl, wenn man den Sector DAFR etwas grösser als 47 Grad macht, damit, wenn das Lineal AB auf ♋ liegt,

liegt, es sich nicht an dem Arm AD so anschliesse, daß der Grad des Azimuth auf NQC, den es anzeigen solle, ganz bedeckt werde. Aus gleichem Grunde ist es gut, wenn man das Gewinde A nicht sehr groß macht, damit es, wenn A nahe an C kömmt, die Grade auf CQ nicht bedecke. Uebrigens da dieses nur um die Mittagszeit geschieht, wo ohnehin das Azimuth nicht sehr genau durch die Sonnenhöhe bestimmt werden kann, so hat es auch nichts auf sich, wenn gleich die 20 oder 30 erste Grade bedeckt werden, da es an sich rathsamer ist, daß man sie nie gebrauche, daß will sagen, das Azimuth Morgens früher, Nachmittags später zu bestimmen suche. Da endlich das Gewind A nie höher gegen R hinauf zu stehen kömmt, als bis dahin, wo der Arm AD horizontal liegt, so kann man von dem Sector CMNR den Theil, der noch höher ist, weglassen, und so wird er von nicht mehrern Graden seyn, als die gröste Sonnenhöhe; dabey aber bleibt die Chorde und ihre Eintheilung und Lage eben so, als wenn man den Sector gantz beybehielte. Es ist fast unnöthig zu erinnern, daß man an dem Gewinde A einen Stift befestigen kann, welcher auf einem um NMC herum beschriebenen concentrischen Bogen, Grade anzeige. Diese mögen dienen, den Sector ADRF, nach geschehener Observation, um so viel hinauf zu drehen, als die Refraction beträgt, wenn das Instrument groß

groß genug ist, daß man bey kleinern Sonnenhöhen derselben, darauf Rechnung tragen kann.

III. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu bestimmen.

§. 28.

Das erst beschriebene Azimuthalinstrument hat nun den vorhin (§. 21.) verlangten Vortheil der einfachen und bloß linearen Scalen, und ist überdies sehr leicht und ohne weitläuftige Vorbereitung zu gebrauchen. Ueberdies kommt der Umstand dabey vor, daß die Ungleichheit der Grade auf der Chorde NQC gleichsam der Maaßstab von der Zuverläßigkeit der Observation angiebt, weil diese nur so weit geht, als die Theile, welche sich in jedem Fall auf NC noch unterscheiden lassen. Ich habe daher gesucht, ob diese Vortheile auch bey einem Sector erhalten werden könnten, welcher anstatt des Azimuth die Stunden angeben würde.

§. 29.

Zu diesem Ende kehrte ich zu dem Triangel ECA zurücke (§. 22.) wobey nunmehr Fig. II.

$$ECA = e$$
$$CEA = k$$
$$CAM = c$$
$$AC = SPZ = \omega$$

zu betrachten vorkömmt. Diesen proiicirte ich so, daß das Aug im Nadir des Eckes A und die Tafel auf der aus dem Auge durch A gehenden Linien senkrecht war. Es sey demnach Fig. VIII.

$$MAC = c$$
$$AC = \text{tang.} \tfrac{1}{2} \omega$$
$$AQ = \cot \omega$$
$$AQR = 90 \text{ Grad}$$
$$RCQ = 90 - e$$

so wird, wenn man aus R den Bogen CN beschreibt, der Winkel

$$ECA = e$$
$$AEC = k$$

demnach AER die Höhe der Sonne seyn. Zieht man ferner RM auf EAM, und KR auf RQ senkrecht, so ist

$$KRM = 90° - MAC = 90 - c$$

folglich KRM der Declination der Sonne gleich, und

$$MRE = 90° - MER = k$$

demnach wenn RM vertical ist, so ist RE gegen die Sonne gerichtet, weil MRE ihrem Abstand vom Scheitelpunct gleich ist. Endlich haben wir

$$QC = \text{tang} \tfrac{1}{2} \omega + \cot \omega = \text{cosec} \, \omega$$
$$QA : QC = \cot \omega : \text{cosec} \, \omega = \text{cosin} \, \omega$$

Wird daher CQ und damit der ganze Triangel CRQ und der Bogen CN als beständig genommen, und CQ als ein Halbmesser angesehen, so ist AQ der Cosinus des Stundenbogens

bogens ω, und auf diese Art lassen sich auf QC die Stunden zeichnen, wenn man sie dahin zeichnet, wo die Cosinus ihrer Bögen hintreffen.

§. 30.

Will man demnach aus dieser Figur ein Instrument machen, so muß Fig. IX.

KRM die Declination der Sonne
RM vertical
ER gegen die Sonne gerichtet
EA horizonthal

seyn. Dieses kann nun auf folgende Art erhalten werden.

§. 31.

An dem Sector HCLNR wird der Bogen CL = LN der Höhe des Aequators gleich gemacht, die Chorde CQN gezogen, und indem man sie als einen Diameter ansieht, so trägt man die Sinus versus der Stundenbögen aus C gegen N darauf, um die Stunden und Minuten darauf zu verzeichnen. Von L in K zählt man 90 Grade, und trägt aus K vor- und rückwerts die Declination jeder Grade der Ecliptic, um die Zeichen des Thierkreises darauf zu zeichnen. In dem Centro R wird ein bewegliches Lineal RA angemacht und mit Dioptern versehen. In E aber wird ein Winkelhacken ABD angehenkt, so, daß durch die Schwere des Gewichtes D die Schärfe des Lineals AB allemal in eine horizontale Lage kom-

komme. Endlich hängt aus R der Faden R M mit dem Gewichte M herunter.

§. 32.

Soll nun die Stunde gefunden werden, so wird der Sector in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß der Faden R M auf den Ort der Sonne falle. Sodann richtet man die Diopteren E N gegen den Mittelpunct der Sonne, und läßt den Winkelhacken A D B frey hangen und sich in Ruhe setzen. Dieser wird sodann in A die Stunde und Minute anzeigen.

§. 33.

Man kann diesen Sector mit Wegschaffung des rechten Winkels K R L folgendermassen abändern und geschmeidiger machen. Der Bogen N C bleibt wie vorhin der doppelten Höhe des Aequators gleich, und die Chorde N Q C wie eben so, in Stunden getheilt. Hingegen werden die Grade der Declination aus L vor- und rückwärts getragen. An dem Lineal R E läßt man aus E einen Faden E P mit dem Gewichte P herunter hangen, und die Diopteren F B werden in D rechtwinklicht an dem Lineal R E D befestigt.

Fig. X.

§. 34.

Um nun damit die Stunde zu finden, dreht man das Lineal R E D auf das Zeichen und Grad der Ecliptic, in welchem die Sonne ist,

 und

und wendet sodann den ganzen Sector so, daß das Lineal eine verticale Lage bekomme, oder der Faden E P auf E R treffe, oder, welches einerley ist, der Ort der Sonne in M vertical über R sey. Sodann dreht man das Lineal, um die Diopteren B F gegen die Sonne zu richten, und läßt den Faden frey hangen und sich in Ruhe setzen, so wird derselbe in A die Stunde und Minuten weisen, die zu finden war.

IV. Methode diese Sectoren für jede Polhöhe universal zu machen.

§. 35.

Die erst beschriebene Sectoren, wodurch vermittelst der Höhe der Sonne sowohl das Azimuth als die Zeit gefunden wird, haben ausser der einfachen und blos linearen Scale noch den Vortheil, daß sie fast, ohne weitere Zubereitung, für jede Polhöhen allgemein gemacht werden können. Die Möglichkeit dieses beträchtlichen Vortheils rührt daher, daß die Eintheilung der Scale C N für jede Polhöhen einerley ist, und daß sich schlechthin nur der Winkel Q R C ändert, als welcher allemal der Höhe des Aequators gleich gemacht werden muß. Setzt man demnach Q C N beständig, so wird Q R desto länger, je grösser die Tangente der Polhöhe Q C R ist, und aus gleichem Grunde verlängert sich C R = E R in Ver-

 hältniß

hältniß der Secante der Polhöhe. Dieses fordert demnach, daß man auf der Linie RQ noch ein Lineal befestige, und auf demselben die Tangente der Polhöhe aus R gegen Q trage, damit man die Scale CN, welche nunmehr beweglich gemacht werden muß, auf die Polhöhe schieben und befestigen könne. Eben so müssen auch die Secanten der Polhöhe auf dem Lineale RE aufgetragen werden, um den Faden EP jedesmal da anzuhängen, wo die Polhöhe gezeichnet steht. Beyden Linealen RQ, RE giebt man die Länge, welche die gröste Pohlhöhe erfordert, wo man zu observiren gedenkt; und anstatt dem Instrumente die Figur eines Sectors zu geben, kann man es in ein Rectangel verwandeln, dessen Breite = CN, die Länge aber der Secante der grösten Polhöhe gleich ist, für welche man es zu gebrauchen gedenkt.

§. 36.

Auf diese Art verwandelt wird nun das Instrument in der 11. Figur vorgestellt, wie es vom Aequator bis unter dem Polarcircul gebraucht werden kann. Die Stundenleiter NC läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben und bey jeder Polhöhe befestigen. Auf NC sind die Stunden nach den Sinus versus der Stundenbögen, auf HN und GC die Tangenten der Polhöhen, und auf RED ihre Secanten aufgetragen. Auf dem Bogen M finden

Fig. XI.

finden sich die Zeichen und Grade des Thierkreises nach ihrer Declination. Die Dioptern FB sind ebenfalls auf DR rechtwinklicht. Wird nun NC auf die Polhöhe geschoben und befestigt, der Faden EP bey der Polhöhe E angeschraubt, der Ort der Sonne M vertical über R gestellt, und die Dioptern BF gegen die Sonne gerichtet, so schneidet der Faden in A die Stunde und Minuten ab. Die Verticallinie MR geht immer in K durch den Punct des Auf- und Unterganges der Sonne. KQ ist der Sinus der Ascensionaldifferenz, QA der Sinus des Stundenbogens, von 6 Uhr an gerechnet, KRE = REA das Complement der Sonnenhöhe, RKA = KAE das Complement der Declination, und

RE : KA = sin RKA : sin KRE.

§. 37.

Alles dieses geht nun bey dem vorhin (§. 25 seqq.) beschriebenen Azimuthalsector auch an, und die Verwandlung fällt so aus, wie es die 12te Figur vorstellt. Die Azimuthalscale NC, welche nach den Sinus versus des Azimuth eingetheilt ist, läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben, und bey der Polhöhe, die nach ihren Tangenten aufgetragen ist, befestigen. Auf dem andern Sector DAF, sind auf AR die Grade der Polhöhe nach ihren Secanten, und auf dem Bogen DF die Zeichen und Grade des Thierkreises

Fig. XII.

 nach

nach ihrer Declination aufgetragen. Die Polhöhe fällt in R, und der Sector läßt sich um diesen Punct drehen, so wie die Dioptern AB sich um sein Centrum A drehen läßt. NC oder HG wird immer vertical-gestellt, und AB in B auf den Ort der Sonne gelegt, sodann der ganze Sector DAF so gedreht, daß AB gegen die Sonne gerichtet sey; und so wird die Schärfe AB auf NC den Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, abschneiden.

§. 38.

Die Genauigkeit dieser Instrumente hängt fürnehmlich von der Länge der Scale NC ab, weil sich auf derselben desto kleinere Theile noch unterscheiden lassen, je länger sie gemacht wird. Ist diese Länge von einem Fuß, oder 1440 Decimaltheile von Linien, so wird in Q eine Minute Zeit noch die Grösse von drey solcher Decimaltheile haben, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Linie groß seyn. Von Q gegen C und N werden sie immer kleiner. Es ist dieses aber kein Fehler des Instruments, weil sich die Zeit aus der Sonnenhöhe desto minder genau finden läßt, je näher die Sonne bey dem Mittage ist. Man setze

Fig. X.

Fig. II.

$$PZ = e$$
$$ZS = k$$
$$PS = c$$
$$ZPS = \omega$$

so haben wir die Gleichung

$$\cos k = \cos e . \cos c + \sin e . \sin c . \cos \omega$$

Wird nun e, c beständig angenommen, und k, ω differentiirt, so ist

$$\sin k . dk = \sin e . \sin c . \sin \omega . d\omega$$

folglich ist

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

der Fehler in der Zeit, wenn dk der Fehler in der Höhe der Sonne ist. Setzt man nun, die Höhe der Sonne werde mit dem Sector NEC gemessen, und CR sey = 1, so ist auf der Stundenleiter NC ein kleiner Theil der Zeit z. E. eine Minute desto weniger zu erkennen, Fig. X.

1°. je kleiner QC = sin e ist,

2°. je schiefer der Faden EAP die Linie NC schneidet, folglich je kleiner sin EAQ = sin c ist,

3. je mehr die Zeittheile in A kleiner sind als in Q, folglich je kleiner sin ω ist.

Demnach wächst aus diesen Gründen die Schwürigkeit, einen kleinen Zeittheil auf NC zu erkennen, in zusammengesetzter Verhältniß von sin c . sin e . sin ω. Dieses ist nun eben der Theiler der erstgefundenen Formel

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

Der Zähler ist

$$\sin k\, dk = -d \cos k . = d \sin MRD$$

und giebt folglich an, um wie viel der Perpendicul EP von der Verticale MR weggerückt wird, wenn man mit dem Instrument statt

 der

Wird

der wahren Sonnenhöhe eine grössere nimmt. Da die Möglichkeit diesen Fehler zu erkennen, mit dessen Grösse zunimmt, so nimmt die Schwürigkeit, denselben zu erkennen, in umgekehrter Verhältniß ab, und dieses macht, daß $\int k . d k$ die übrige Factoren $\int c . \int e \int \omega$ nicht multiplicirt, sondern dadurch getheilt wird. Da wir demnach die Formel

$$d\omega = \frac{\int k . d k}{\int c . \int e . \int \omega}$$

unmittelbar und ganz auf dem Instrumente finden, so ziehen wir die Folge daraus, daß es einerley ist, ob man die Zeit in A observirt, oder ob man die Höhe der Sonne mit dem Sector CNR nimmt und daraus die Zeit berechnet.

§. 39.

Man muß ferner bey diesen, und überhaupt bey allen gnomonischen Instrumenten, welche nach dem Ort der Sonne gerichtet werden müssen, diesen Ort genau wissen, und zwar nicht nur für die Mittagszeit, sondern für die Stunde der Observation. Da man nun diese Stunde erst durch das Instrument finden will, so kann man den Ort der Sonne anfangs so annehmen, wie derselbe für die Mittagszeit aus den Astronomischen Tafeln berechnet wird, und damit sehen, wie viel Uhr es seyn würde. Man sucht sodann den Ort der Sonne für diese Zeit, und stellt entweder die Observation aufs neue an,

an, oder giebt auch nur den Instrument die Lage, die es würde gehabt haben, wenn man gleich anfangs den wahren Ort der Sonne gebraucht hätte. So z. E. müssen bey dieser Veränderung die Dioptern B F unbeweglich bleiben, und nur der Sector N C R gedreht werden, bis der wahre Ort der Sonne in die Verticallinie M R trift. Uebrigens, wenn das Instrument groß genug ist, daß sich solche kleinere Veränderungen darauf bemerken lassen, so muß man ebenfalls der Refraction Rechnung tragen, und dies geschieht, wenn man nach geschehener Observation die Dioptern so viel der horizontalen Lage näher rückt, als die Refraction beträgt.

V. Constructionen für die Sonnenhöhe.

§. 40.

Da bey dem erstbeschriebenen Sector der Winkel MRE der Höhe der Sonne, und E A Q den Abstand der Sonne vom Pol gleich ist, so darf man nur durch jede Zeit A eine Linie AE mit RM parallel ziehen, um die Höhe der Sonne ERM zu haben. Da nun MR allemal durch den Ort der Sonne M gezogen ist, so wird die Höhe der Sonne für jeden Tag und Stunde ohne Mühe bestimmt.

§. 41.

§. 41.

So leicht und allgemein nun diese Construction ist, so werde ich dessen unerachtet noch eine andere hersetzen, welche zwar nicht so allgemein ist, dabey aber dennoch etwas sehr einfaches und leichtes an sich hat. Man nimmt für den fürgegebenen Tag die Mittagshöhe und die Mitternachtstiefe der Sonne, oder welches einerley ist, die Summe und Differenz der Aequatorshöhe und der Declination. Sodann, indem man in dem Circul AFBL den verticalen und horizontalen Diameter FL, AB gezogen, trägt man die Mittagshöhe aus B in D, die Mitternachtstiefe aus B in E, oder aus A in M, und zieht DG, EH mit dem Horizonte AB parallel. Auf GH beschreibt man den Circul GJHP und theilt denselben in 24 Stunden. Wird sodann durch jede Stunde J die Linie PJK horizontal, oder mit AB parallel gezogen, so findet sich BK, die dazu gehörende Höhe der Sonne, NGQ ist die Tageslänge, und NHQ die Nachtlänge, DE die doppelte Höhe des Aequators, RJ der Sinus der Sonnenhöhe in beständiger Verhältniß des Products der beyden Chorden NJ, QJ. Denn da NQ die Chorde des Nachtbogens, NJQ der Hälfte desselben gleich, folglich NQ zu sin. NJQ in beständiger Verhältniß ist, so ist auch

Fig. XIII.

$$NJ \backsim \sin NQJ$$
$$QJ \backsim \sin QNJ$$

Nun ist

$$JR = NJ.\sin QNJ$$

demnach

$$JR \backsim NJ.QJ.$$

Es ist aber, wenn man die wirkliche Gleichung sucht

$$\sin NJQ = NQ:GH$$

demnach

$$NQ = GH.\sin NJQ$$
$$NJ = GH.\sin NQJ$$
$$JR = GH.\sin NQJ.\sin QNJ$$

Nun ist, wenn man $AC = 1$ setzt

$$CG = \cos.(c-e)$$
$$CH = -\cos(c+e)$$

demnach

$$GH = \cos(c-e) - \cos(c+e) = 2\sin c.\sin e$$

und daher der Sinus der Sonenhöhe

$$JR = 2\sin c.\sin e.\sin NQJ.\sin QNJ$$

Es ist aber, wenn J eine Nachmittagsstunde ist, der Bogen NPJ die Zeit vom Aufgange der Sonne, JQ die Zeit bis zum Untergang der Sonne. Demnach läßt sich, wenn die Tageslänge bekannt ist, die Höhe der Sonne durch die blosse Addition von vier Logarithmen berechnen. Da übrigens DE die doppelte Aequatorshöhe ist, so ist die Chorde DE für jede Declination der Sonne von beständiger Grösse, und eben die, so in der 9ten, 10ten und 11ten Figur CN ist. Demnach läßt sich auch aus dieser 12ten Figur ein ähnliches Instrument herleiten.

VI.

VI. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren.

§. 42.

Die Kunst Sonnenuhren zu machen wird häufig auch von solchen Leuten ausgeübt, die von allen dazu gehörigen Gründen schlechthin nichts verstehen. Unter andern Anlässen, die ich gehabt habe, ohne Rücksicht auf so viele selbst auf dem Lande anzutreffende Sonnenuhren diese Anmerckung zu machen, fande ich einen solchen Künstler, der ungefähr wußte, daß bey dem Horizonthal- und mittäglichen Verticaluhren die Stunden nicht gleich nahe bey einander sind. Dieses brachte ihn, oder einen seiner Vorgänger, auf den Einfall aus A und B die Bögen B D, A D zu beschreiben, jeden in sechs gleiche Theile zu theilen, und aus der Mitte C die Stundenlinien in die Theilungspuncte zu ziehen, sodann den Zeiger unter einen halben Winkel, das will sagen, unter 45 Graden auf C D aufzurichten. So wird unstreitig die Uhr leicht und geschwinde gezeichnet, nur muß man für die Genauigkeit derselben nicht gut stehen, weil diese eine beträchtliche Verbesserung der Methode erfordert, wenn man statt der Tangenten oder Aequinoctiallinie, solche Circulbögen, dergleichen A D, BD sind, dazu gebrauchen will.

Fig. XIV.

§. 43.

§. 43.

Man ziehe nemlich den Circul HDM, und darin die beyden Diameter HM, VD perpendiculär. Den Circul HDM theile man in 24 gleiche Theile als Stunden. Sodann mache man VDC der Höhe des Aequators, und VDP der Hälfte desselben gleich, und aus dem Centro C beschreibe man durch D den Circul ADE. Aus P ziehe man in jede Stunden des Circuls HDM blinde Linien, und wo diese den Circul ADE durchschneiden, da ziehe man aus V Linien, welches die Stundenlinien der Horizonthaluhr für die Polhöhe DCV seyn werden.

Fig. XV.

§. 44.

Die Figur ist eine Projection der Sphäre auf den Horizont, wenn das Aug im Zenith ist. HDM ist der Horizont, ADE der Aequator, P der Pol, V das Zenith, VF ein Verticalcircul, DG der Stundenbogen auf dem Aequator, oder die Zeit vom Mittage an in Grade verwandelt, GDF die Höhe des Aequators, demnach, weil der Triangel DFG in F rechtwinklicht ist,

$$\cos GDF = \cot DG . \tan DF$$

daher ist DF der Stundenbogen, oder DVF der Stundenwinkel für die Horizontalsonnenuhr. Die blinden Linien PG sind schlechthin nur, um den Aequator ADE nach dem Regeln der Projection in Grade einzutheilen.

§. 45.

§. 45.

Nimmt man zu dem Winkeln V D C, V D P statt der ganzen und halben Aequatorshöhe, die ganzen und halbe Polhöhe, so erhält man statt der Horizontaluhr eine mittägliche Verticaluhr. Diese Verzeichnungsart ist dadurch geschmeidiger und in allem eben so einfach als die gewöhnliche, weil man hier anstatt einer geraden Aequinoctiallinie, welche für die Morgen- und Abendstunden, gar zu sehr verlängert werden muß, den Aequinoctialcircul A D E gebraucht.

§. 46.

Man kann sich ferner eben dieser Projectionsart bedienen, um eine Vorbereitung zu finden, nach welcher sodann jede Horizontal- und Verticaluhren für jede Polhöhen, durch blosse Zeichnung eines halben Circuls gezeichnet werden könnten. Die Vorbereitung selbst ist folgende:

§. 47.

Fig. XVI. Aus dem Durchschnitte der Perpendicularen A C B, D C E zieht man den Circul A B D E, und beschreibt sodann durch die Punct D, E Circulbögen, welche die Linie D E unter Winkeln von 15, 30, 45, 60, 75 Graden durchschneiden. Es ist klar, daß die Halbmesser dieser Bögen Secanten dieser Grade seyn, ihre Mittelpuncte auf A B liegen, und von C um die Tangenten dieser Grade entfernt seyn werden. Dieses ist nun die Vorbereitung.

§. 48.

§. 48.

Sollte nun eine Horizontaluhr verzeichnet werden, so macht man A P der Polhöhe gleich, zieht P Q mit A B parallel, und beschreibt aus der Mitte E den halben Circul P M K, so ist K M die Mittagslinie, der Zeiger wird in K aufgerichtet, und die Durchschnittspuncten 1, 2, 3 rc. 11, 10, 9 rc. geben die Stundenbögen der Horizontaluhr, wenn man aus denselben gerade Linien in k zieht. Macht man hingegen M P der Höhe des Aequators gleich, so erhält man auf eben die Art eine mittägliche Verticaluhr.

§. 49.

Es sey K das Zenith, P H Q M der Horizont, K Q der Halbmesser, K D werde der Tangente und K E der Cotangente der halben Aequatorshöhe gleich gemacht, so sind D, E die beyden Pole, D N E ein Mittagskreis, M D N = M E N der Stundenwinkel, und M E die Polhöhe. Da nun in dem rechtwinklichten Triangel M E N Fig. XVII.

$$\sin EM = \cot MEN . \tan MN$$

so ist M N der Stundenbogen, oder M K N der Stundenwinkel für die Horinzontaluhr. Man setze nun C A = 1, so ist C K = dem Sinus der Polhöhe, K Q = K M deren Cosinus. Da nun vermög der Projectionsart, jede Mittagscircul E N D die Mittagslinie E D unter eben den Winkeln schneiden, unter welche sie auf der

 Sphäre

Sphäre den Mittagskreis schneiden, so ergiebt sich hieraus die Construction der Uhr, wie sie in der 16ten Figur vorgestellet worden, wo die Buchstaben A, B, C, D, E K, M, P, Q eben die Bedeutung haben, wie in der 17ten Figur.

§. 50.

Man findet sehr häufig kleine Horizontaluhren, die man bey sich tragen kann, und wo die Mittagslinie entweder durch den darauf gezeichneten Thierkreis, oder vermittelst einer Magnetnadel gefunden wird. Solche Uhren sind nun allerdings für eine gewisse Polhöhe, und dieses mag der Grund seyn, warum Reisende sich lieber Aequinoctialuhren anschaffen, welche auf jede Polhöhe können gerichtet werden. Man kann aber diesen Vortheil auf eine eben so leichte Art bey jeder Horizontaluhr erhalten. Man setze z. E. die Uhr sey für den 55ten Grad der Polhöhe gezeichnet, so wird sie unter dieser Polhöhe in der That eine horizontale Lage haben. Will man sie aber unter einer andern Polhöhe z. E. unter dem 50sten Grade gebrauchen, so muß man sie gegen Mittag um 5 Grade erhöhen, damit der Zeiger einen Winkel von 50 Gr. mit dem Horizonte mache. Zu diesem Ende kann das Plättgen

Fig. XVIII oder Täfelgen A C, auf welchem die Uhr verzeichnet ist, vermittelst eines Gewindes in A an ein anderes A B angeschraubt werden. Um demselben sodann die behörige Erhöhung zu

zu geben, wird in B ein Circulbogen, dessen Centrum in A ist, so angemacht, daß man ihn sowohl legen als aufrichten kann. Oder man läßt durch C eine Stellschraube auf B gehen, durch deren Umdrehen man A C nach Erforderniß erhöhen kann. Es ist dabey möglich die Schraubengänge mit der Distanz A B so zu proportioniren, daß bey jedem Umgange der Schraube A C um einen Grad erhöht wird. Dieses geschieht, wenn A C so lang als $57\frac{3}{10}$ Schraubengänge genommen wird. Das leichteste und aus andern Absichten zugleich das vortheilhafteste Mittel aber ist das Unterschieben eines rechtwinklichten Prisma D. Denn A C wird um desto mehr erhöht, je näher D gegen A geschoben wird. Wie weit aber das Prisma D an jedem Orte müsse geschoben werden, läßt sich am bequemsten finden, wenn man auf dem untern Plättgen A B eine Landcharte verzeichnet. Denn so wird die Uhr auch von denen gebraucht werden können, die von der Polhöhe gar keinen Begrif haben.

§. 51.

Da die Höhe des Prisma D als beständig angesehen wird, so ist A D in Verhältniß der Cotangente des Winkels C A B. Da diese Cotangente unendlich wird, wenn C A D = 0 ist, so thut man am besten, wenn man dem Winkel C A B 5 Grade giebt, wenn D in B zu liegen kömmt, das will sagen, die Son-

nenuhr

nenuhr wird für eine Polhöhe verzeichnet, die 5 Grade grösser ist, als die gröste, so man auf der Lancharte anbringen will. Man setze z. E. es solle der 55te Grad der Polhöhe in B fallen, welches ungefähr die nördliche Grenzlinie von Deutschland ist, so sieht man die Länge AB als die Cotangente von 5 Graden an, und trägt nach gleichem Maaßstabe die Cotangenten von 6, 7, 8, 9, 10, 11 ꝛc. Graden aus A gegen B, und nach eben dem Maaßstabe erhält das Prisma D die Höhe von dem Halbmesser. Die Sonnenuhr auf dem obern Plättgen AB wird für den 60sten Grad der Polhöhe verzeichnet. Die Grade der Länge bleiben hiebey willkührlich. Man kann sie daher sowohl nach der Breite der Sonnenuhr, als nach dem Districte der Erdfläche richten, welches man auf die Landcharte bringen will. Man kann aus der 19ten Figur sehen, wie die Sache ausfällt. AD ist der Halbmesser und zugleich die Höhe des Prisma, AB die Tangente von 85 Grad, und die übrigen Puncte der Scale AB sind die Tangenten von 84, 83, 82, 81 ꝛc. Graden. Die Uhr AC ist auf die Polhöhe 60 Grad gezeichnet, und daher ist bey B der 55ste Grad gesetzt, weil, wenn das Prisma in B untergestellt wird, die Fläche der Uhr um 5 Gr. erhöht, demnach der Zeiger um 5 Grad vertieft, daß will sagen, auf die Polhöhe von 55 Grad gerichtet wird. Fig. XIX.

§. 52.

§. 52.

Es wird dem Leser von selbst beyfallen, daß die beyden Instrumente, so die 11te und 12te Figur vorstellt, ebenfalls von der Art sind, daß eine Landcharte darauf verzeichnet werden kann, und zwar desto besser, weil die in GC und HN verzeichnete Grade der Breite oder Polhöhe weniger ungleich sind. Fig. XI. et XII.

§. 53.

Wenn die Abweichung der Magnetnadel an einerley Ort beständig bliebe, so liessen sich auf der Landcharte die sogenannten Halleyschen Linien zeichnen, um den Gebrauch der Sonnenuhr auch auf diese Art allgemein zu machen. Man kann aber auch auf der Uhr selbst den Thierkreis zeichnen, und zwar für die Polhöhe von 60 Gr. für welche die Uhr horizontal ist. Unter jeder andern Polhöhe giebt man durch Unterschiebung des Prisma der Uhr die behörige Erhöhung, und dreht sie sodann herum, bis der Schatten auf den Ort der Sonne trift, um dadurch zugleich die Stunde und die Lage der Mittagslinie zu finden. Fig. XIX.

VII. Beschreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden.

§. 54.

Fig. XX. Wir haben dieses Instrument oben (§. 19.) nur kurz angezeigt, und werden nun die Art dasselbe zu verzeichnen noch angeben. Man beschreibe auf einem Diameter CB, von beliebiger Länge, den halben Circul CNB, und mache den Winkel BCK der Polhöhe gleich. Aus dem Mittelpunct H ziehe man HF mit CK parallel, und aus C die Linie CF auf HF senkrecht. Man beschreibe sodann mit dem Halbmesser FH aus F den Circulbogen HQ, und theile denselben in Stunden. Aus jeder Stunde ziehe man Perpendicularen auf HF, so wird man eben so viele Centra haben, aus welchen durch C Circulbögen CD gezogen werden müssen, welche, wenn LCK = MCK der Obliquität der Ecliptic gleich gemacht wird, innert den Linien MC, LC sodann gezogen werden. Diesen Bögen werden die Stunden beygeschrieben, und aus K gegen L und M die doppelte Grade der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aufgetragen. Endlich wird in C ein Faden CP mit einer Perl N und Gewichte P angehängt, und die Dioptern auf CB mit dieser Linie parallel angemacht.

§. 55.

Soll nun damit die Stunde gefunden werden, so richtet man die Dioptern CB gegen die Sonne, und läßt den Faden frey hangen. Sodann schiebt man die Perl in N auf den 12ten Stundenkreis, und legt den Faden auf den Ort der Sonne, z. E. in CR, so fällt die Perl in S auf 4 Uhr 25 Min. Nachmittag, oder 7 Uhr 35 Min. Vormittag.

§. 56.

Dieses Instrument hat zugleich den Vortheil, daß es nach geometrischer Schärfe genau ist, und auf eine sehr einfache und leichte Art verzeichnet werden kann. Bey den Quadranten, die man in den meisten Anweisungen zur Gnomonic angiebt, fehlt es an beyden. Denn werden sie durch lauter Circulbögen construirt, so geht der geometrischen Schärfe ab. Construirt man sie aber vermittelst der für jede Stunden und Zeichen voraus berechneten Sonnenhöhen durch krumme Linien, so muß man diese von freyer Hand ziehen, und die Arbeit wird weitläuftig. In dem Gebrauche ist gegenwärtiger halbe Circul von den Quadranten auch nur in sofern verschieden, daß man bey den Quadranten die Perl anfangs auf den Ort der Sonne schiebt, und sodann die Höhe der Sonne sucht, hier aber bey der Höhe anfängt, und dann die Perl aus N in S bringt.

VIII. Beschreibung eines gleichschenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden.

§. 57.

Fig. XXI. Man nimmt auf der verticalen Linie AE als einen Halbmesser an, und trägt die Sinus versus der Stunden aus A aufwerts. Sodann nimmt man auf gleicher Scale die Tangente der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt die Tangenten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus E aufwerts und unterwerts. Endlich nimmt man auf eben der Scale die halbe Secante der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt auf den beyden Schenkeln CD, CF die Secanten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus C gegen D und F. Diese beyden Schenkel haben in C ein Gewinde wie die beyden Schenkel eines Proportionalcirculs. In D wird gleichfalls ein bewegliches Gewinde angebracht, so, daß sich nicht nur CD an AD herumdrehen lasse, sondern daß der Mittelpunct des Gewindes D auf den sowohl auf CD als auf AD gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geschoben werden könne. In F aber wird an dem Schenkel CF ein Stift angemacht, so, daß derselbe ebenfalls auf den auf diesem Schenkel gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geschoben und befestigt werden könne. Die Dioptern können auf CD oder auf FC kommen, weil jeder dieser Schenkel einerley Winkel mit dem Horizonte macht. Ist nun das Gewind in D und der Stift in F auf den Ort der Sonne gestellt, so rückt man den Stift F auf der Stundenlinie AB herauf oder herunter bis die Dioptern FC oder CD gegen die Sonne gerichtet sind, alsdenn zeigt der Stift die Stunde und Minute, die zu finden war.

§. 58.

Es sey, um dieses zu beweisen,

- p die Polhöhe
- d die Declination
- h die Höhe der Sonne
- ω die Stunde oder der Stundenbogen, von Mittag an gerechnet;

so ist vermög der Construction

$$AE = 1$$

$$ED = \tang d \cdot \tang p$$

$$CD = CF = \tfrac{1}{2} \sec d \cdot \sec p$$

$$EF = \cos \omega$$

$$DCF = 2h$$

$$DF = 2DC \cdot \sin h = \sec d \cdot \sec p \cdot \sin h$$

Nun ist

$$DF = DE + EF$$

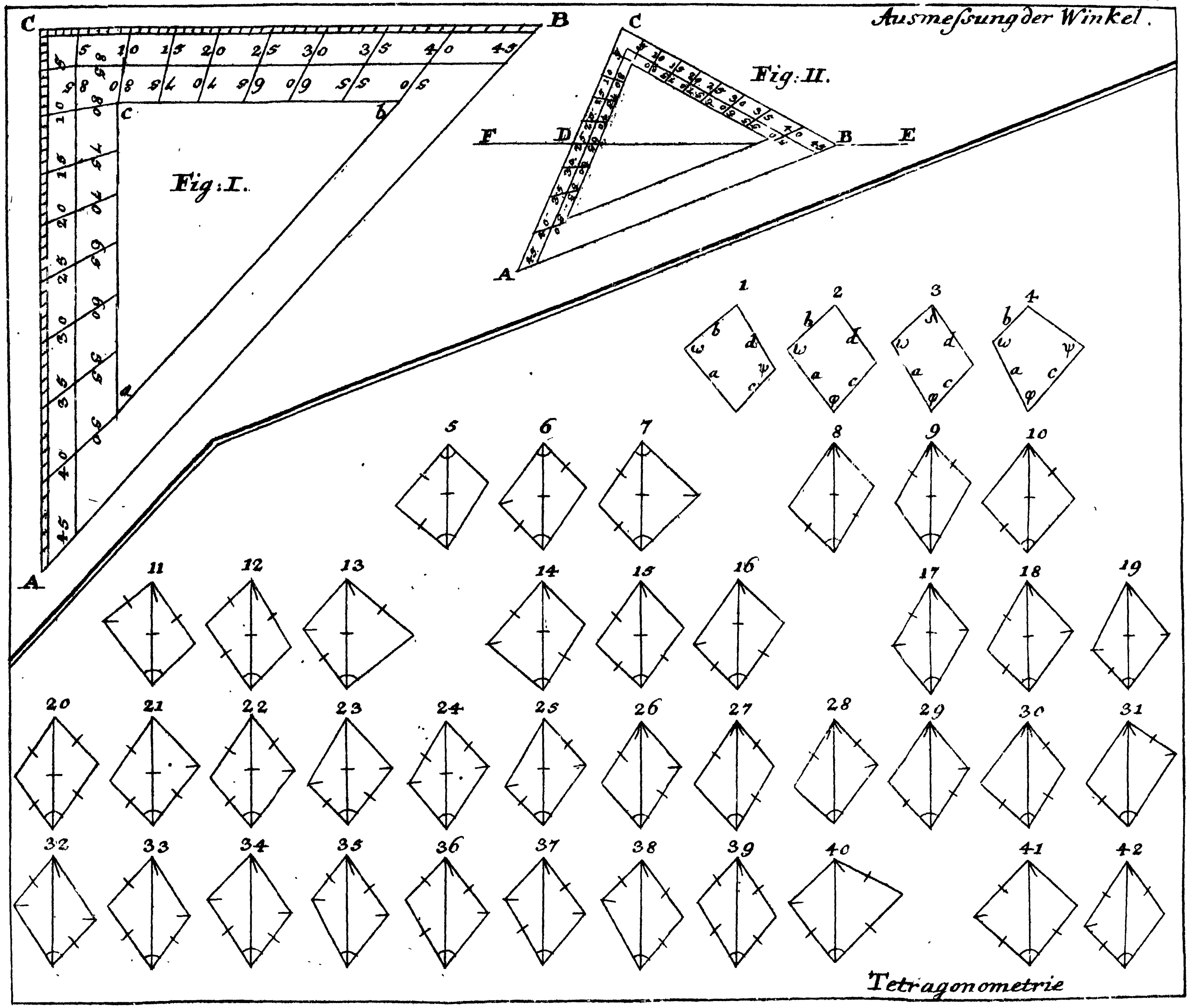
folglich

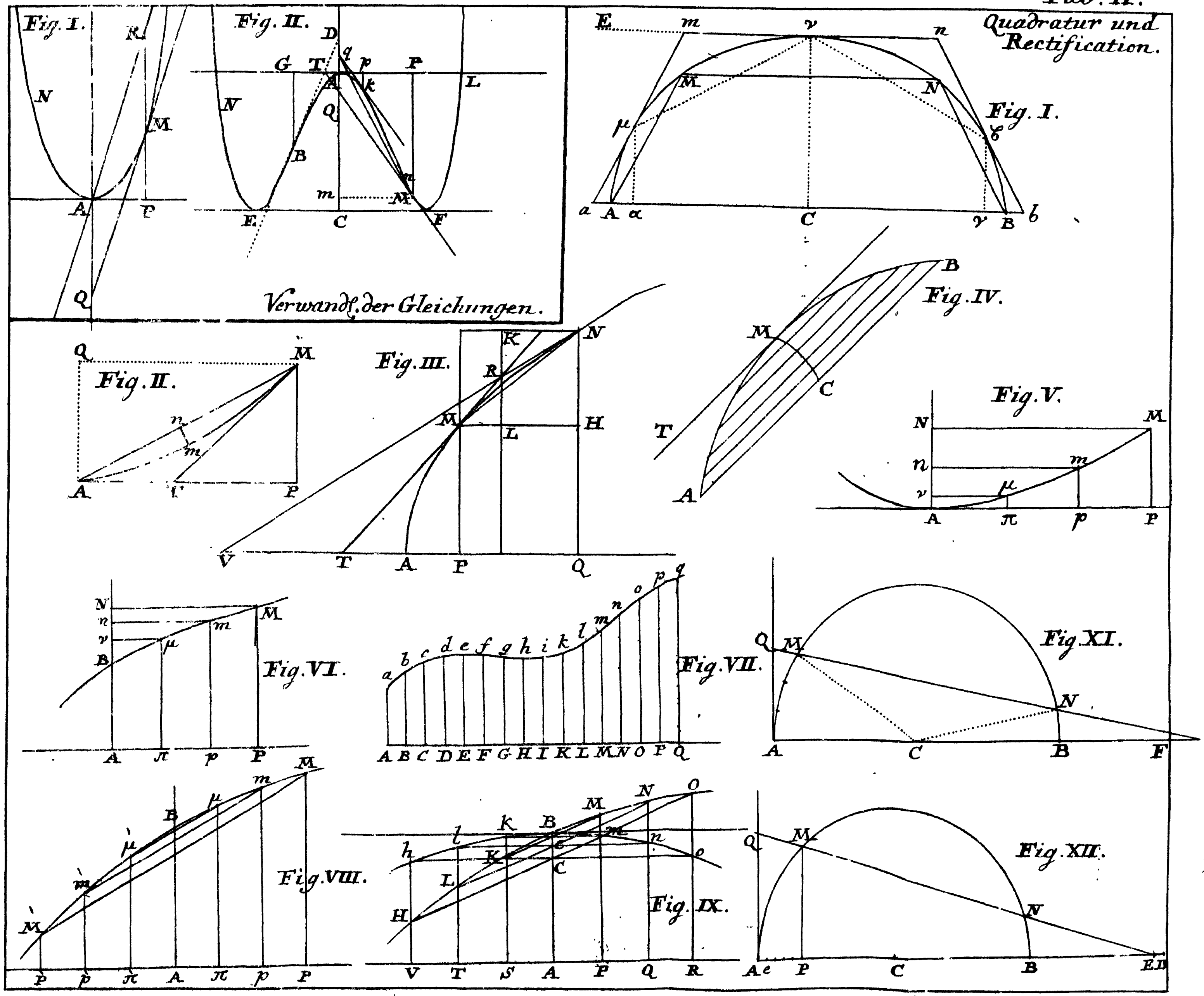
$$\sec d . \sec p . \sin h = \tang d . \tang p + \cos \omega$$

oder, wenn man durch $\sec d . \sec p$ dividirt

$$\sin h = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos \omega$$

Da dieses die bekannte Gleichung zwischen der Polhöhe, Declination, Sonnenhöhe und Stundenbogen ist, so ist die Construction diejenige, welche diese Gleichung erfordert.


Ausmessung der Winkel.
Fig: I.
Fig: II.
Tetragonometrie


Quadratur und Rectification.
Fig. I.
Fig. II.
Verwandſ. der Gleichungen.
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. XI.
Fig. XII.

Tab. III.

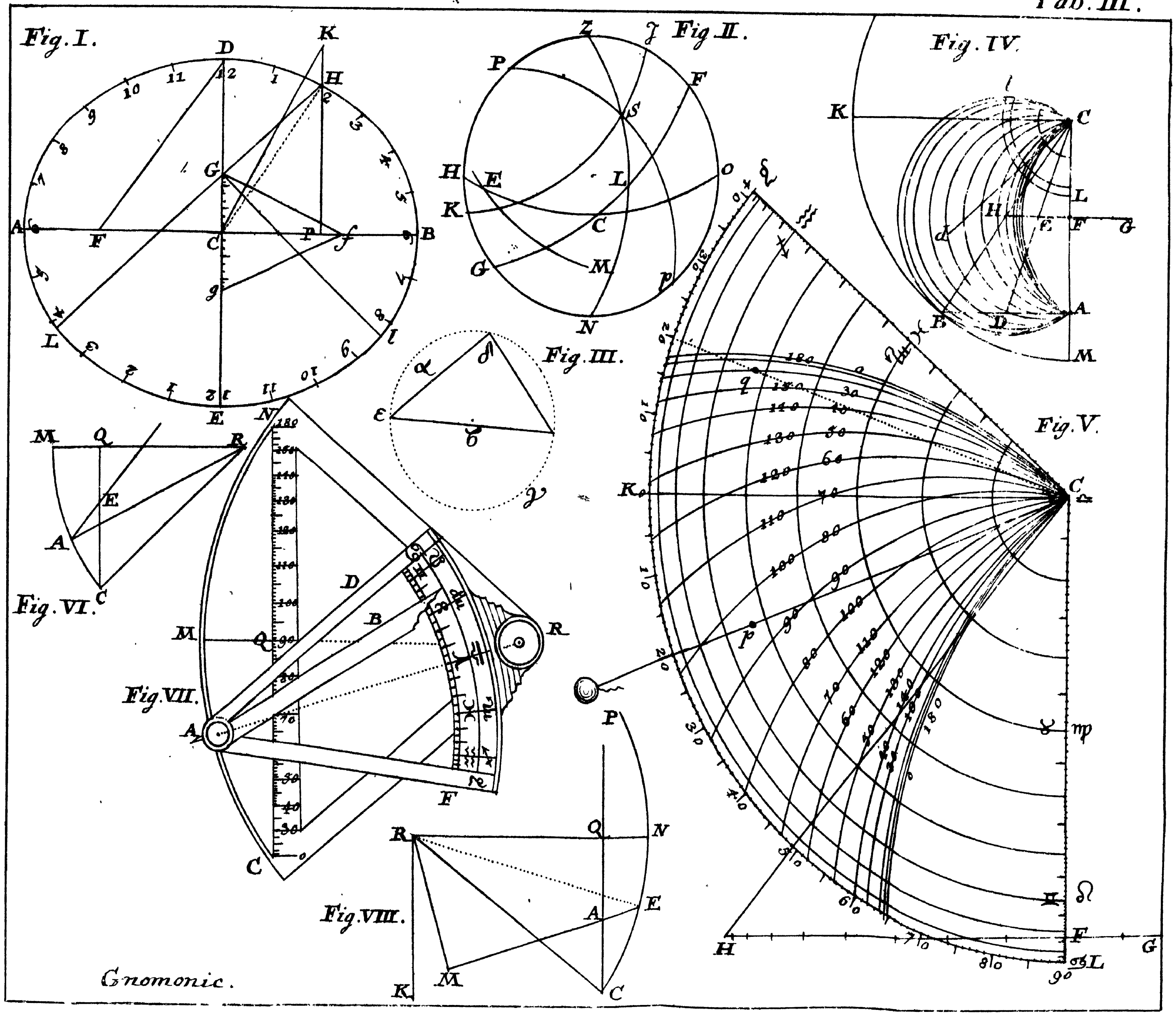
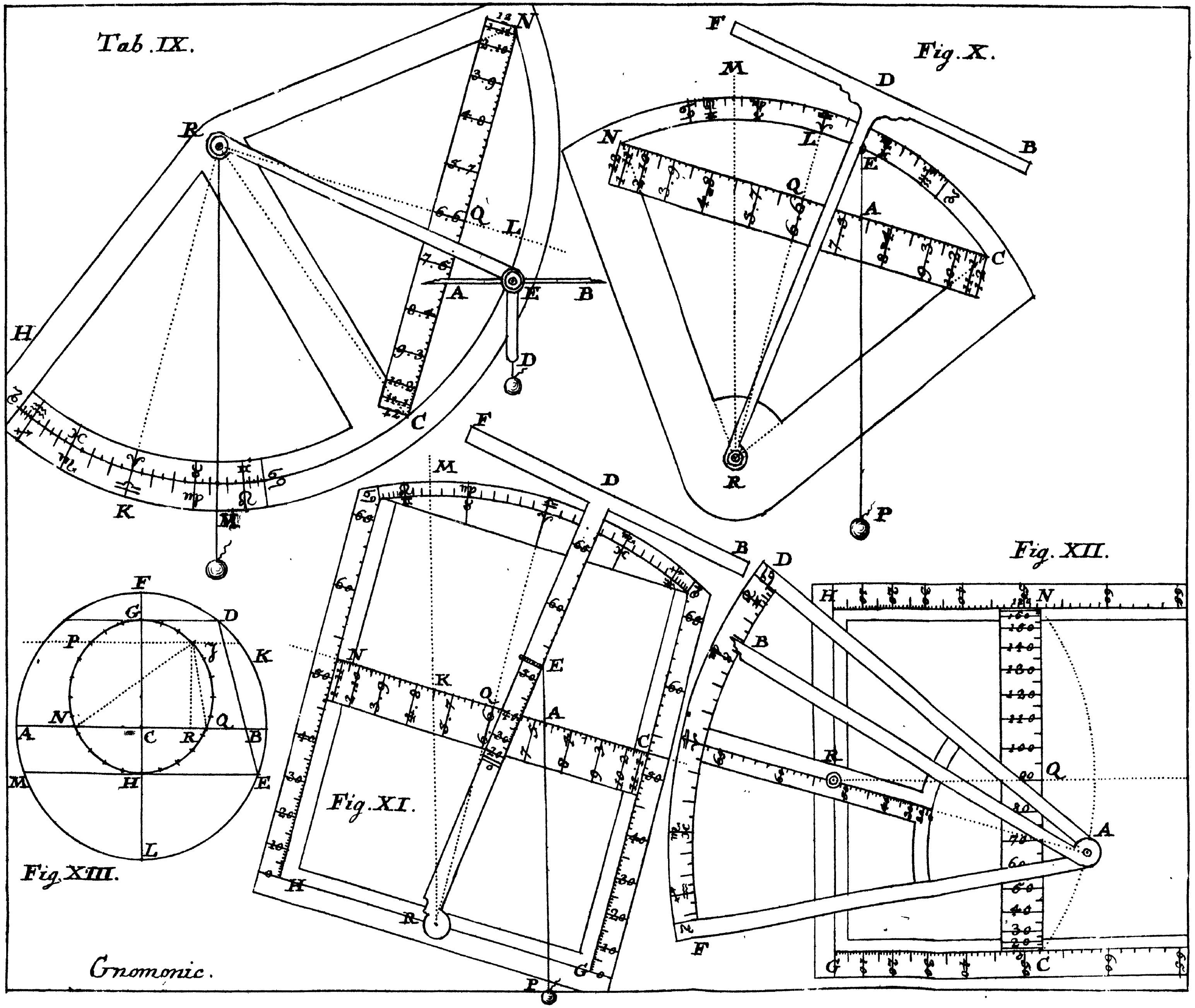


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Gnomonic.

Tab. IV.



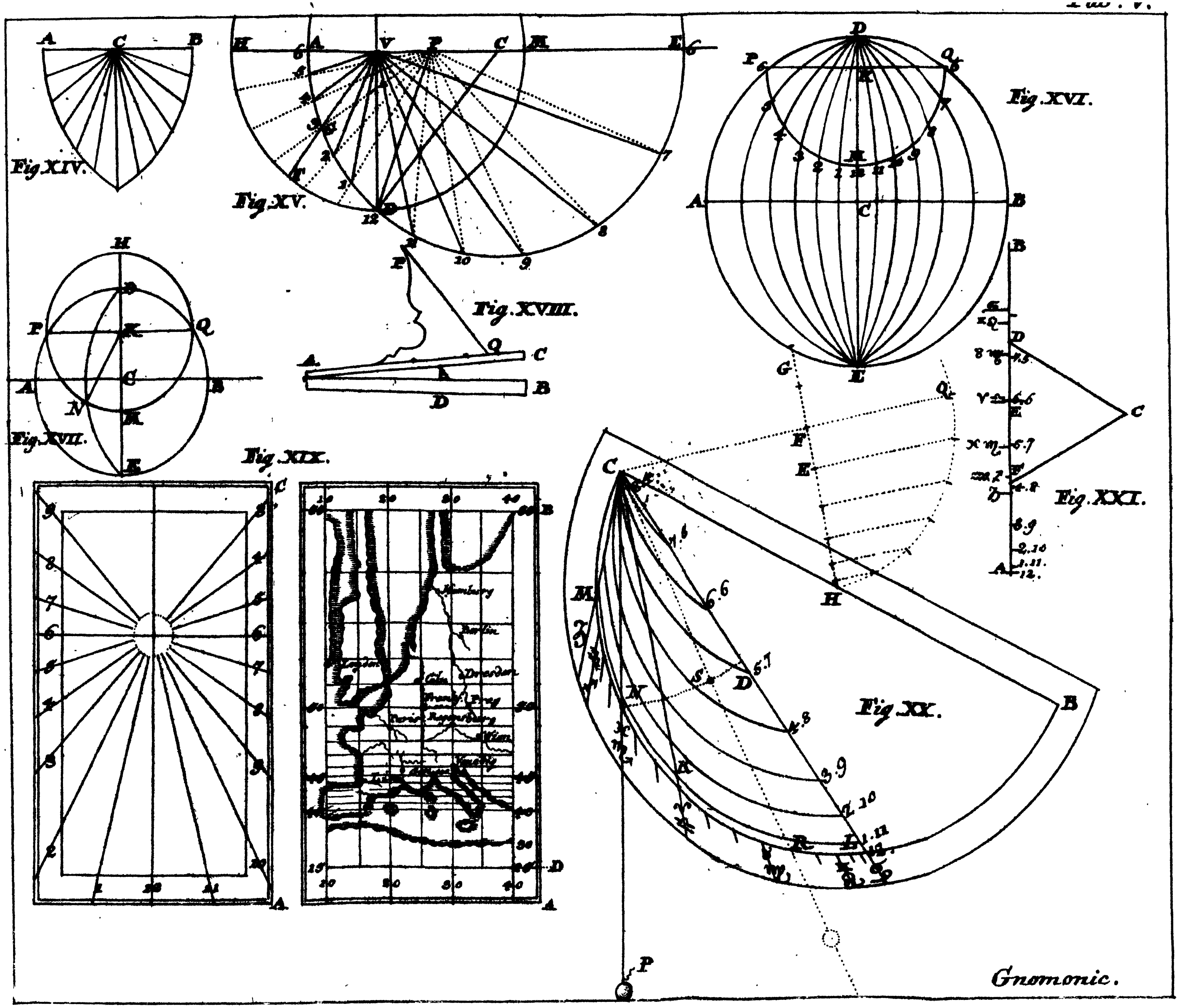


Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.
Fig. XXI.
Hamburg
Berlin
Dresden
Prag
Wien
Gnomonic.