

Tel.: +49-521-105335
Fax: +49-521-105325
E-Mail: sieben@math.uni-bielefeld.de

Liebes Büchlein

Das Rechenbuch von Carl Friedrich Gauß

Christian Siebeneicher

Für Omanita.

Received: date / Accepted: date

Es gibt allgemeine Wahrheiten, die unser Verstand bereit ist aufzunehmen, sobald er deren Richtigkeit in einigen besonderen Fällen erkannt hat.

Leonhard Euler.

Zusammenfassung Schon als Kind von acht Jahren besaß Carl Friedrich Gauß ein 1737 publiziertes Rechenbuch, das eine Lesart von Fermats Satz für die Primzahl 7 enthält. Die ersten drei Abschnitte der Disquisitiones Arithmeticae lesen sich wie die Ausarbeitung dieses Sachverhalts.

Abstract Already as a child of eight years Carl Friedrich Gauss had a 1737 published book on arithmetic containing a version of Fermat's Theorem for the prime number 7. The onset of the Disquisitiones Arithmeticae appears to be the elaboration of that fact.

Keywords Remer : Arithmetica theoretico practica · Gauss : Disquisitiones Arithmeticae

Mathematics Subject Classification (2010) MSC 11A07 11A41

1 Einleitung

1981 verkündete Walter Kaufmann Bühler in ‘Gauss: A Biographical Study’ ([3] p. 161):

It should not be expected that the discovery and publication of new documents would lead to important revelations about Gauss's scientific or private life. The last new document of this kind was the diary, which was discovered in 1898. The published sources provide ample material for a broad and thorough understanding of Gauss.

25 Jahre später berichtete Maarten Bullynck 2006 in seiner PhD These über ein in der Göttinger Gauß-Bibliothek aufbewahrtes Buch, in das Gauß als 16jähriger 1793 seinen Namen eingetragen hatte ([4], p. 241): Es ist die 1786 erschienene ‘Beschreibung einer ganz neuen Art ...’ von Carl Friedrich Hindenburg [24], die in den bekannten Quellen — über die M. Brendel und L. Schlesinger im Abschnitt Sonstiges am Ende von Abteilung zwei des zehnten Bandes von Gauß' Werken einen Überblick geben ([19], Werke Band X₂) — nicht genannt wird. In Weiterführung von Thesen Felix Kleins zu der von ihm so genannten *vorhistorische Periode* ([25], p. 31/32) entstand 2009 auf der Basis dieses Fundes mit ‘Decimal

periods and their tables: A German research topic (1765–1801)’ ein Bericht zur Genese der *Disquisitiones Arithmeticae*, in dem anhand bislang unbekannter Fakten die Rolle der periodischen Dezimalbrüche neu durchleuchtet und bewertet wird — mit dem Ergebnis ([8] p. 150): »... *One young reader of both Lambert’s Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen (1770) and Hindenburg’s Beschreibung would, however, merge Lambert’s more theoretical approach with Hindenburg’s care for constructing information-packed tables. In 1793, only 16 years old, Carl Friedrich Gauss was in possession of both books and had just taken up his studies at the Collegium Carolinum in Braunschweig. He would completely solve the open problems, put the theory of periodic decimal expansions in a final form, and make its connection to number theory clear*«. — Weiter heißt es dann: »*What is certain, however, is that Gauss knew about the problem of periodic decimal fractions in 1793. That year, he got a copy of Hindenburg’s Beschreibung and also of Lambert’s Zusätze, where Fermat’s little theorem is explained (p. 43). Apparently, after reading these books, Gauss began calculating his own tables of decimal periods*«.

2 Gauß und die periodischen Dezimalbrüche

Mehr als einmal wird in *Decimal periods* aber auch Johann Carl Schulzes *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln* erwähnt, die Gauß — zufolge der PhD These — schon 1791 hatte, also bereits als 14jähriger ([4], p. 276). Details zu diesem Jahr von großer Bedeutung für Gauß berichtet dessen erster Biograph Wolfgang Sartorius von Waltershausen ([42], p. 15):

... Damals wurde der Herzog Carl Wilhelm Ferdinand auf den genialen jungen Mann aufmerksam gemacht. Er verlangte ihn daher selbst kennen zu lernen und im Jahre 1791 wurde Gauss zum ersten Male bei Hofe vorgestellt.

Während sich die Umgebung des Herzogs an den Rechenkünsten des bescheidenen, etwas schüchternen 14jährigen Knaben ergötzte, verstand der edle Fürst mit feinem Takt, ohne Zweifel im Bewusstsein einen ganz ungewöhnlichen Geist vor sich zu haben, seine Liebe zu gewinnen und wusste die Mittel zu gewähren, die für die weitere Ausbildung eines so merkwürdigen Talentes erforderlich waren.

Gauss verliess mehrfach beschenkt (von Feronce erhielt er seine ersten logarithmischen Tafeln) die hohe Gesellschaft und bezog vom Herzog unterstützt im Februar 1792 das Collegium Carolinum.

Nur am Rande wird in der Fußnote 45 von *Decimal periods* das folgende Detail aus der Vorrede Schulzes zu seiner Tafel-Sammlung mitgeteilt: »... *though Schulze [1778, I, VI–VII] mentions in his introduction that he left out the period table because Hindenburg (see infra) promised him more extensive ones*« ([8] p. 150).

Ausführlicher heißt es bei Schulze selbst: »... *und drittens habe ich die Tafel, welche alle Brüche, deren Nenner unter 100 in Decimalteilen ausgedruckt, enthalten sollte, weil sie mir noch zur Zeit zu unreif schien, besonders da sich Herr Mag. Hindenburg gütigst gegen mich erboten, beträchtliche Zusätze zu liefern, völlig weggelassen* ... « ([47] p. VI und VII). Doch spricht etwas dagegen, dass diese Nachricht aus der modernen Welt des Rechnens den ‘*bescheidenen, etwas schüchternen 14jährigen Knaben*’ veranlasste, die Berechnung einer solchen Tafel schon zu beginnen, bevor er 1793 die Werke Lamberts und Hindenburgs in die Hand bekam — und im gleichen Jahr auch Euklids *Elemente*? Ohne Erwägung auch dieser Möglichkeit kann es in dem *German research topic* dann weitergehen mit ([8], p. 151):

The principles of the theory of these decimal periods are proven in all completeness in Section III of the *Disquisitiones*. Of course, the theory rests upon Fermat’s little theorem, now written in the congruential form and proven not with the binomial theorem but through enumeration:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (p \text{ prime, } a \text{ not divisible by } p)$$

3 Zwei weitere Quellen aus dem Nachlass von Gauß

Doch sind es wirklich die Dezimalbruch–Perioden, die das mit sieben Siegeln versiegelte Buch zugänglich machen — wie das Meisterwerk in ‘*The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss’s Disquisitiones Arithmeticae*’ heisst ([23], p. 4)? Da ist nämlich auch Fermats Satz, der unvermutet kürzlich als Kongruenz $a^m \equiv a$ in den Leistenotizen auftauchte [30]:

Ideal.

Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae, tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyseos promovendos viresque ingenii nostri acuendas occasionem praebant. Cum enim plurimas investigationes, unde maxima utilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum, deserere cogamur, non minus pretium, iis speculationibus statuendum videtur quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur.

Das Il y a des vérités generales que notre esprit est prêt d’embrasser aussitôt qu’il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers.

Euler. Histoire de l’Ac. de Berlin
1748. p. 234.

Au sujet du theorem de Fermat : $a^m \equiv a$.
on pourra comparer encore
l’appel au public par König et
la reponse d’Euler Hist. de l’Ac. de Pr. A. 1750 p. 530

Gauß–B. 45

Auf eine deutsche Übersetzung des lateinischen Textes in einer Veröffentlichung von Karin Reich wies Maarten Bullynck hin. Ein [Scan des Blattes](#) ist am Ende der Arbeit.

Zu den *Leistenotizen* sagt Felix Klein in seinen ‘*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*’: » ... ein im übrigen belangloses mit weißen Blättern durchschossenes Rechenbuch von Leiste, das Gauß schon vor seiner Göttinger Zeit besessen hatte, und das ihm nun, parallellaufend neben dem Tagebuch, bis 1798 für Aufzeichnungen aller Art diente« ([25], p. 30). Und weil Klein in seinem Werke–Beitrag zu Gauß’ Tagebuch ausdrücklich auch auf die außerordentliche Bedeutung dieser Notizen hinweist ([26], p. 487), verblüfft es, dass er den spektakulären Eintrag — » *Au sujet du theorem de Fermat : $a^m \equiv a$* « — mit Schweigen übergeht.

Durch eine Angabe zur äußeren Form der Notizen kann dieser vermeintliche Lapsus Kleins aufgeklärt werden. In dem Aufsatz *Über Gauss’ Arbeiten zur Funktionentheorie* in Band X_2 der Werke führt Ludwig Schlesinger zu den Notizen nämlich aus ([46], p. 6):

Neben seinem Namen hat GAUSS auf das Schutzblatt des Buches eingeschrieben:

Const. liber ipse	8
ligatura	4
	12

Dadurch wird bestätigt, dass wirklich alle handschriftlichen Eintragungen, die das Buch enthält, von GAUSS herrühren.

Eine hiervon abweichende Auskunft liefert eine maschinengeschriebenen Inventarliste der Gauß–Bibliothek zum handschriftlichen Nachlass. Unter dem Kennwort, *Handb 1, Leistes "Arithmetik und Algebra"*, enthält das Verzeichnis kurze Inhaltsangaben der den regulären Seiten des Buches jeweils gegenüberliegenden Durchschussblätter. Dem folgt: *hintere Vorsatzblätter, Zitate aus Euler u. a.* Die Inspektion der Notizen an-

hand eines Scans führt dann auf die Signatur Gauß-B. 45 der Gauß-Bibliothek auf der letzten Seite. Der Scan war 2007 als „Digiwunschbuch“ beim *Göttinger Digitalisierungs Zentrum* beantragt, in der gewünschten Form aber nicht genehmigt worden. In einer Email des Direktors der *Handschriftenabteilung der Gauß Bibliothek* wird erklärt warum:

... meine Kollegen vom Göttinger Digitalisierungs Zentrum haben mir Ihre Mitteilung vom 6. Juli übermittelt und mich gebeten, Ihre Fragen zu beantworten. Das durchschossene Gaußsche Handexemplar von Christian Leistes Arithmetik und Algebra (Wolfenbüttel 1790) wurde wegen der zahlreichen handschriftlichen Notizen in den Nachlass überstellt. Das Exemplar war zunächst unter der Signatur Gauß-Bibl. 45 Teil der Gauß-Bibliothek, bevor die Umsignierung erfolgte (vermutlich bereits zu Brendels Zeit).

Handschriften stellen wir für gewöhnlich nicht in das Netz, da sie Unikate sind und wir eine unkontrollierte Verbreitung in diesem Fall für nachteilig halten. Sollten wir uns entschließen, den gesamten Gauß-Nachlass und seine Bibliothek zu digitalisieren, sähe die Sache anders aus. Ein solches großes Digitalisierungsprojekt würde Drittmittel in erheblicher Höhe erfordern, deren Einwerbung momentan nicht erfolgsversprechend sind. Dennoch habe ich die Hoffnung, einen solchen Antrag in den nächsten Jahren vorzubereiten.

Mit besten Grüßen, ...

Felix Klein, unter dessen Ägide nach Scherings Tod ab 1898 die Herausgabe von Gauß' Werken erfolgte, kannte das zu den Notizen gebundene Blatt wohl nicht. In einer knappen Inhaltsangabe der *Disquisitiones Arithmeticae* teilte er das Buch nämlich in drei Teile und stellte fest: »*Der erste beschäftigt sich mit der Frage der quadratischen Reste und enthält den ersten Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, dieses fundamentalen Satzes aller Zahlentheorie*«. Fermats Satz maß er für die Grundlegung der *Disquisitiones Arithmeticae* nicht die Rolle zu, die bei Kenntnis der Kongruenz $a^m \equiv a$ selbstverständlich erscheint.

Die Frage liegt nahe, woher dieses exzeptionelle Blatt kommt. Eine Anfrage an die Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der SUB-Göttingen lieferte zwar keine Auskunft, doch enthielt die Email von Bärbel Mund andere sachdienliche Informationen:

... ich hatte gehofft, die jetzt wiederum beigefügte Anlage sei eindeutig:

Bei Cod. Ms. Gauss Handbuch 1 handelt es sich um einen Band, dem im Laufe der Zeit drei Signaturen zugewiesen wurden (früher: Gauss Bibl. 45 bzw. Cod. Ms. Gauss 14; heute: Cod. Ms. Gauss Handbuch 1).

Es handelt sich halt um ein durchschossenes Handexemplar. Wer den gedruckten Text für vorrangig hält, verwahrt ein solches Werk in der Bibliothek. Wer die handschriftlichen Anmerkungen für wertvoller hält, legt das Stück zum Nachlass — und im Nachlass Gauss wurden mehrfach Signaturen geändert.

Ich möchte bei der Gelegenheit auf eine aktuelle Veröffentlichung hinweisen, in der die beiden Euler-Zitate ("Ideal : Speculationes ..." bzw. "Il y a des vérités ...") wiedergegeben werden:

Karin Reich: Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkrantz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten. In: Studien zur Wissenschafts- und zur Religionsgeschichte. Redaktion: Werner Leffeldt. Berlin 2011 (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Bd. 10, Sammelband 2) (S. 223–273; Zitat S. 230).

Wegen der nichtssagenden Angabe Euler u. a. in der Inventarliste der Gauß-Bibliothek wird deren Benutzer allein im Lesesaal und mit den Notizen in der Hand — oder neuerdings eben auch über einen privat erworbenen Scan des Buches — entdecken können, dass sich hinter dem Kürzel u. a Fermats Satz verbirgt. Damit fehlt in der schriftlichen Dokumentation über Gauß aber jeder Hinweis auf den ersten Höhepunkt in dem *Buch aller Bücher*, wie von Kronecker, Norbert Schappacher zufolge, die *Disquisitiones* genannt wurden ([17], p. XIV*). Diese Unstimmigkeit im Nachlass von Gauß führte wohl dazu, dass Walter K. Bühler 'important revelations about Gauss's scientific or private life' ausschloss.

Keiner der damals Verantwortlichen hatte anscheinend bedacht, dass die Entnahme eines Blattes aus demjenigen Buch, in das Gauß selbst es gelegt hatte, einen massiven Eingriff in seinen Nachlass darstellt — ganz zu schweigen von der Verfälschung seiner Notizen im Anschluss daran, als dieses Blatt dann kurzerhand zu den *Leistenotizen* gebunden wurde.

Neben diesem Blatt der Notizen gibt es noch eine weitere unbeachtet gebliebene Nachlassquelle: In der Sitzung der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften vom 8. Februar 1918 legte Felix Klein den Aufsatz von Philipp Maennchen über ‘*Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss*’ vor. In einer Fußnote wird mit der 1737 publizierten *Arithmetica theoretico practica* von Christian Stephan Remer auf ein Rechenbuch hingewiesen, das Gauß bereits als 8jähriges Kind besaß ([31] p. 11). ‘*Important revelations about Gauss’s scientific or private life*’ versprach dieses Buch offenbar nicht.

In Gauß’ „Kinderbuch“ erscheint in einer Rechnung nun aber eine Version von Fermats Satz für die Primzahl 7 ([40] p. 303–304), und dies stiftet eine direkte Beziehung zu der Kongruenz $a^m \equiv a$. Eulers Motto, »es gibt allgemeine Wahrheiten, die unser Verstand bereit ist aufzunehmen, sobald er in einigen besonderen Fällen deren Richtigkeit erkannt hat«, kann dann als Motor für ein einmaliges Unternehmen in der Mathematik verstanden werden.

Wie die folgenden Verweise zeigen, ist Remers *Arithmetica* in der Literatur über Gauß wohlbekannt: [4], p. 103, 107, 114, 273, [6], p. 9, 10, [7], p. 57, [8], p. 153, [31] p. 11, [32] p. 12/13, [33] p. 17, [35], p. 224, [38], p. 35–51, [45], p. 30, [46], p. 10.

Bevor aber die Rechnung aus Remers *Arithmetica* zum Thema wird, soll es zunächst um die Kongruenz $a^m \equiv a$ aus den Leistenotizen gehen und die Rolle dieser Version des Fermat’schen Satzes für den Aufbau der *Disquisitiones Arithmeticae*.

4 Die Kongruenz $a^m \equiv a$

Die für ganze Zahlen m definierte Zuordnung $m \mapsto a^m$ liefert — unter geeigneten Voraussetzungen und wenn ausschließlich die resultierenden Reste betrachtet werden — den Leitgedanken für den dritten Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* ([16], p. 30):

Die Reste der Glieder einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Reihe bilden eine periodische Reihe.

In dem darauf unmittelbar folgenden Artikel 45 wird dieser Leitsatz präzisiert und durch eine passende Voraussetzung für einen Beweis zugänglich gemacht ([16], p. 30):

Satz. *In jeder geometrischen Progression $1, a, a^2, a^3, \dots$ giebt es ausser dem ersten Gliede 1 noch ein anderes der Einheit nach dem zu a primen Modul p congruentes Glied a^t , dessen Exponent $t < p$ ist.*

Da der Modul p zu a und somit auch zu jeder beliebigen Potenz von a prim ist, so ist kein Glied der Progression $\equiv 0 \pmod{p}$, sondern vielmehr ein jedes irgend einer der Zahlen $1, 2, 3, \dots, p-1$ congruent. Da die Anzahl dieser Zahlen gleich $p-1$ ist, so können offenbar, wenn mehr als $p-1$ Glieder der Progression in Betracht gezogen werden, diese nicht sämtlich verschiedene kleinste Reste haben. Demnach befinden sich unter den Gliedern $1, a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ mindestens zwei congruente. Es sei also $a^m \equiv a^n$ und $m > n$; dann wird, wenn man durch a^n dividiert, $a^{m-n} \equiv 1$ (Artikel 22), wo $m-n < p$ und > 0 ist.

Bemerkung Der Beweis dieses Satzes benutzt ein Verfahren, das unter dem Namen *Dirichlet’sches Schubfachprinzip*¹ in die Literatur eingang ist.

Im gleichen Artikel folgen vier Musterbeispiele mit charakteristischen Besonderheiten der neuen Struktur:

Beispiel. So findet man in der Progression $2, 4, 8, \dots$ als erstes Glied, welches nach dem Modul 13 der Einheit congruent ist, das Glied $2^{12} = 4096$. In derselben Progression ist nach dem Modul 23: $2^{11} = 2048 \equiv 1$. Ebenso ist die sechste Potenz der Zahl 5, d. i. 15625, nach dem Modul 7, dagegen die fünfte, 3125, nach dem Modul 11 der Einheit congruent. In einigen Fällen also wird schon eine Potenz mit kleinerem Exponenten als $p-1$ der Einheit congruent, in andern dagegen muss man bis zur $p-1$ ten Potenz aufsteigen.

¹ Das Schubfachprinzip wurde von Gauß also schon angewendet, bevor Dirichlet 1805 geboren wurde.

Den Beispielen schließt sich die Bemerkung an: »*Bisher haben wir von beliebigen Moduln, wofern sie nur zu a prim sind, gesprochen. Jetzt wollen wir die Moduln, welche absolute Primzahlen sind, gesondert betrachten und auf diesem Grunde nachher die allgemeinere Untersuchung aufbauen*«. Das beginnt mit Artikel 49 und dem

Satz. *Ist p eine Primzahl, welche in a nicht aufgeht, und ist a^t die niedrigste Potenz von a, welche nach dem Modul p der Einheit congruent ist, so ist der Exponent t entweder gleich p – 1 oder ein aliquoter Teil dieser Zahl.*

und dem begleitenden Vorschlag: »*Man vergleiche die Beispiele im Artikel 45*«.

Als allererste Zwischenstation in einem groß angelegten Projekt — und als ein allererstes spektakuläres Ergebnis in den *Disquisitiones Arithmeticae* — folgt dann in Artikel 50 der **Fermat'sche Satz**:

Da also $\frac{p-1}{t}$ eine ganze Zahl ist, so folgt, wenn man beide Seiten der Congruenz $a^t \equiv 1$ zur Potenz $\frac{p-1}{t}$ erhebt, $a^{p-1} \equiv 1$, oder: Die Differenz $a^{p-1} - 1$ ist stets durch p teilbar, wenn p eine in a nicht aufgehende Primzahl ist.

Die gängige Form des Fermat'schen Satzes, die in *Decimal periods* über Lamberts *Zusätze* mit Gauß in Verbindung gebracht wird ([6], p. 151), impliziert also nicht nur die Periodizität der Reste, Fermats Satz ist umgekehrt auch eine Folge von deren Periodizität. Der für das erste bedeutende Resultat der *Disquisitiones Arithmeticae* von Gauß geschaffene Rahmen lässt daher die beiden Seiten der gleichen Medaille sichtbar werden.

Bemerkungen:

1. Auf die *zwei klassischen Formulierungen des Kleinen Fermat'schen Satzes* macht André Weil in seiner *Geschichte der Zahlentheorie* aufmerksam ([50] p. 57/58).
2. Der Eintrag '*au sujet du theoreme de Fermat*' ging in eine Fußnote zu Fermats Satz ein:

In dem berichtigten Streite zwischen *Maupertuis* und *König*, der wegen des Prinzips der kleinsten Aktion entstanden war, aber bald zu andern Sachen überging, behauptet *König* im Besitze eines Briefes von *Leibniz* zu sein, in dem ein mit dem *Euler'schen* vollkommen übereinstimmender Beweis enthalten sei. *Appel au public*, p. 106. Wenn wir auch die Glaubwürdigkeit dieses Zeugnisses nicht in Zweifel ziehen wollen, so hat doch sicher *Leibniz* seine Erfindung nie veröffentlicht. Vgl. *Hist. de l'Ac. de Berlin, Année 1750* p. 530.

Ersichtlich spielt im Beweis von Fermats Satz das Rechnen mit Resten die ausschlaggebende Rolle, und deshalb ist — *vor allem Anderen* — eine geeignete Erweiterung der elementaren Arithmetik nötig, die dafür eine praktikable Möglichkeit eröffnet. In seiner Vorrede zu den *Disquisitiones Arithmeticae* sagt Gauß um was es geht ([16] p. V):

... Da aber das, was gewöhnlich unter dem Namen Arithmetik gelehrt wird, kaum über die Kunst zu zählen und zu rechnen (d. h. die Zahlen durch geeignete Zeichen etwa nach dem dekadischen Systeme darzustellen und die arithmetischen Operationen auszuführen) hinausgeht, mit Hinzufügung noch einiger Sachen, die entweder gar nicht zur Arithmetik gehören (wie die Lehre von den Logarithmen) oder doch wenigstens nicht den ganzen Zahlen eigentümlich sind, sondern für alle Zahlen gelten, so scheint es sachgemäß zu sein, zwei Teile der Arithmetik zu unterscheiden und das Erwähnte zur elementaren Arithmetik zu rechnen, dagegen alle allgemeineren Untersuchungen über die eigentlichen Beziehungen der ganzen Zahlen der *höheren Arithmetik*, von der hier allein die Rede sein wird, zu überweisen.

Zur höheren Arithmetik gehört das, was *Eulid* in den „*Elementen*“ Buch VII ff. mit der bei den Alten gewohnten Strenge und Eleganz gelehrt hat; doch beschränkt sich dies auf die ersten Anfänge dieser Wissenschaft ...

5 Die ersten beiden Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae*

In Umsetzung dieser programmatischen Vorgaben beginnt der erste Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* unmittelbar mit einer für die *Höhere Arithmetik* grundlegenden Definition, die das nötige Fundament für das Rechnen mit Resten bereitstellt ([16] p. 1):

Von der Congruenz der Zahlen im Allgemeinen

Congruente Zahlen, Moduln, Reste und Nichreste

Wenn die Zahl a in der Differenz der Zahlen b, c aufgeht, so werden b und c nach a **congruent**, im andern Falle **incongruent** genannt. Die Zahl a nennen wir den **Modul**. Jede der beiden Zahlen b, c heißt im ersteren Falle **Rest**, im letzteren aber **Nichtrest** der anderen.

⋮

Die Congruenz der Zahlen werden wir im Folgenden durch das Zeichen \equiv andeuten und den Modul da, wo es nötig sein wird, in Klammern hinzufügen: $-16 \equiv 9 \pmod{5}$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$.**

** Dieses Zeichen habe ich wegen der grossen Analogie, die zwischen der Gleichheit und der Congruenz stattfindet, gewählt. Aus demselben Grunde hat LEGENDRE in seinem unten öfter zu erwähnenden Werke geradezu das Gleichheitszeichen für die Congruenz beibehalten; doch habe ich bedenken getragen, ihm darin zu folgen, um keine Zweideutigkeit entstehen zu lassen.

Daniel Shanks, der in Fortsetzung der Ideen Kleins ein schlüssiges Bild des Ablaufs ‘Von den Dezimalbruchperioden zu den *Disquisitiones Arithmeticae*’ entwarf, sagt in seinen *Solved and unsolved Problems in Number Theory* zu diesem Auftakt des Buches ([49] p. 52):

In fact, these opening sentences are completely unmotivated, and hardly understandable, except in the historical light of the previous chapter. But in that light, the time was ripe — and even overripe — for such an investigation. We will review four aspects of the situation then existing . . .

Einige Seiten danach heißt es dann speziell zu den Kongruenzen ([49] p. 55):

We could, it is true, have introduced them earlier—and saved a line here and there in the proofs. But History did not introduce them earlier. Nor would it be in keeping with our title, “Solved and Unsolved Problems,” for us to do so. To have a solved problem, there must first be a *p r o b l e m*, and then a *s o l u t i o n*. We could not expect the reader to appreciate the solution if he did not already appreciate the problem. Moreover, if we have gone on at some length before raising the curtain (and perhaps given undue attention to lighting and orchestration) it is because we thought it a matter of some importance to analyze those considerations which may have led Gauss to invent the residue classes. Knowing what we do of Gauss’s great skill with numbers, and while we can not say for certain, the consideration most likely to have been the immediate cause of the invention would seem to be item (c) above.

und zu *item (c) above* ([49] p. 54):

(c) Again, consider the arithmetic of page 26:

$$167 \mid 2^{83} - 1,$$

or the seemingly impossible operation,

$$32070004059 \mid 2^{16035002279} - 1$$

of Exercise 7 . . .

Nach der Definition des Kongruenzbegriffs und der Einführung des Symbols \equiv , das eine dem Gleichheitszeichen $=$ analoge Praxis auch beim Rechnen mit Resten erlaubt, geht es im zweiten Abschnitt, **Von den Congruenzen ersten Grades**, um die Bereitstellung eines effizienten Werkzeugs für das Rechnen mit diesen neuen Größen.

Unter der Titelzeile, *Vorbereitende Sätze über Primzahlen, Factoren u.s.w.* erfolgt dies in einer ersten Anwendung der neuen Rechentechnik in Artikel 13. Wie Gauß in Artikel 14 dann anmerkt, ist diese Rechnung beispielgebend für seine charakteristisch neue Methode in der Arithmetik ([16], p. 6):

Satz. *Das Product aus zwei positiven Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Primzahl sind, lässt sich nicht durch diese Primzahl teilen.*

Es sei p eine Primzahl und a eine positive Zahl $< p$; dann wird behauptet, dass es keine positive Zahl $b < p$ von der Beschaffenheit giebt, dass $ab \equiv 0 \pmod{p}$ ist.

Beweis. Angenommen es gäbe Zahlen b, c, d, \dots , die sämtlich kleiner als p und von der Beschaffenheit sind, dass $ab \equiv 0, ac \equiv 0, ad \equiv 0, \dots \pmod{p}$. Von allen diesen sei b die kleinste, so dass keine der Zahlen, die kleiner als b sind, jene Eigenschaft besitzt. Dann ist offenbar $b > 1$. Denn wäre $b = 1$, so würde $ab = a < p$ (nach Voraussetzung), also nicht durch p teilbar sein. Mithin lässt sich p , da es eine Primzahl ist, nicht durch b teilen, sondern wird zwischen zwei aufeinanderfolgende Vielfache von b , etwa zwischen mb und $(m+1)b$, fallen. Ist $p - mb = b'$, so wird b' eine positive Zahl und kleiner als b sein. Da nun nach unserer Annahme $ab \equiv 0 \pmod{p}$ ist, so hat man auch $mab \equiv 0$ (nach Artikel 7) und somit, wenn man dies von $ap \equiv 0$ subtrahiert: $a(p - mb) = ab' \equiv 0$, d. h. b müsste zur Reihe der Zahlen b, c, d, \dots gerechnet werden, obwohl es b kleiner als die kleinste b dieser Zahlen ist. Dies widerspricht aber unserer Annahme.

14.

Wenn weder a noch b durch die Primzahl p sich teilen lässt, so ist auch das Product ab durch p nicht teilbar.

Die kleinsten positiven Reste der Zahlen a, b nach dem Modul p seien α, β , von denen (nach Voraussetzung) keiner gleich 0 ist. Wäre nun $ab \equiv 0 \pmod{p}$, so würde auch, da $ab \equiv \alpha\beta$ ist, $\alpha\beta \equiv 0$ sein, was mit dem vorhergehenden Satze nicht verträglich ist.

Den beiden Sätzen schließt sich in Artikel 14 noch die Bemerkung an ([16], p. 7):

Der Beweis dieses Satzes ist bereits von Euclid, Elem. VII, 32, gegeben worden. Wir haben ihn jedoch nicht weglassen wollen, einmal weil von den Neueren einige entweder nur nichtige Gründe für einen Beweis des Satzes ausgegeben oder ihn ganz und gar übergangen haben, sodann weil sich das Wesen der hier angewendeten Methode, deren wir uns später zur Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten bedienen werden, an einem einfacheren Beispiel leichter verstehen läßt.

Gauß' Methode, Euklids Lemma rechnend zu beweisen, ist ein entscheidender Fortschritt gegenüber dem 2000 Jahre älteren Beweis Euklids. In *The Book of Numbers* haben John Conway und Richard Guy diesen Gedanken wieder belebt — und dabei ergab sich ganz nebenbei auch die Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren ([10], p. 132/133). Igor R. Shafarevitch bekräftigt in *Discourses on Algebra* diese Sicht auf Gauß' fundamentalen Beitrag zur Mathematik ([48] p. 10 und 12).

Mit Blick auf Verallgemeinerungen des Satzes von der Eindeutigkeit einer Primfaktorzerlegung geht Dirichlet in seinen *Vorlesungen über Zahlentheorie* bei dem Beweis des Lemmas anders vor ([11], p. 31): »... beobachten wir nun vor allen Dingen, dass das ganze Gebäude auf $e i n e m$ Fundament ruht, nämlich auf dem Algorithmus welcher dazu dient, den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen aufzufinden.« Mit der vollständigen Induction kommt nun ein neues Princip ([11], p. 3) zum Zuge — das Gauß n i c h t benötigt.

Felix Klein charakterisierte die *Disquisitiones Arithmeticae* in seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik* und stellt sie dann Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie* gegenüber ([25], p. 27):

Freilich, wer einen Einblick in die Geschichte der großen, hier niedergelegten Entdeckungen zu gewinnen wünscht, der wird sich durch das Studium der *Disquisitiones Arithmeticae* nicht befriedigt fühlen. Diese lückenlose, mit unerbittlicher Strenge durchgeführte Deduktion verrät nichts von den Entstehungsversuchen und überwundenen Schwierigkeiten. Die Darstellung knüpft an keinerlei allgemeine Gesichtspunkte an, beschäftigt sich auch nicht etwa mit der Frage, welche Bedeutung die aufgeworfenen Probleme haben, die so virtuos gelöst werden, und ist darum in ihrer Unzugänglichkeit äußerst schwierig zu lesen. Erst durch Dirichlets interpretierende Vorlesungen, die eine vorzügliche Einführung in Gauß' Problemstellung und Denkweise geben, ist dem Werk zu der ihm gebührenden Wirkung verholfen worden.

Doch kommt Gauß' eigene Vorstellung von der *Problemstellung und Denkweise* der höheren Arithmetik — und dabei insbesondere auch einer Methode, »deren wir uns später zur Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten bedienen werden« — nicht i d e a l durch das folgende Beispiel aus seinem „Kinderbuch“ zum Ausdruck?

6 Die Rechnung aus dem Jahr 1737

Das Beispiel aus dem Kinderbuch lautet ([40] p. 303–304):

... Nun aber steigen die [Reste] von einer Geometrischen Progression, die mit 10 aufsteigt, wie im vorhergehenden § bewiesen, in 7 geteilet, mit 3 auf.

Der Rest also des ersten Gliedes ist 1,

3 mal 1 ist 3, der Rest des andern Gliedes,

und 3 mal 3 ist 9; so ist in 7 mit einem Reste 2 theilbar, da 2 der Rest des dritten Gliedes.

Ferner ist $2 \cdot 3 = 6$ dem Rest des vierdten Gliedes.

Weiter ist $6 \cdot 3 = 18$ in 7 mit dem Reste 4 theilbar, das 4 = dem Rest des fünfften Gliedes.

Noch ist $4 \cdot 3 = 12$ in 7 mit dem Reste 5 theilbar, und 5 also der Rest des sechsten Gliedes.

Endlich ist $5 \cdot 3 = 15$ in 7 mit dem Reste 1 wieder theilbar, da 1 der Rest des siebenden Gliedes.

Darum sind die Reste der ersten sechs Glieder solcher Progression folgende: 1, 3, 2, 6, 4, 5, und der 6 folgenden Glieder Reste sind abermal selbige Zahlen, u.s.w.

Zusammen mit der Kongruenz $a^m \equiv a$ in den Leistenotizen legt diese Rechnung nahe, dass die beim Rechnen mit Resten geltende, versteckte arithmetische Wahrheit sich periodisch wiederholender Reste der *allgemeinere und natürlichere* Gesichtspunkt ist, von dem Gauß bereits nach nur einer Woche Aufenthalts in Göttingen in seinem Brief vom 19. Oktober 1795 an den Hofrath Zimmermann berichtete ([20], p. 20). Zuvor hatte er mit der Eintragung, *Explicitus October. 11. 1795* die Arbeit an seiner *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche* abgeschlossen ([1] p. 4) und war noch am gleichen Tag von Braunschweig aufgebrochen, um sein Studium in Göttingen zu beginnen (Dunnington [12] p. 391):

Ich habe die Bibliothek gesehen und verspreche mir davon einen nicht geringen Beitrag zu meiner glücklichen Existenz in Göttingen. Ich habe schon mehrere Bände von den *Commentt. Acad. Petrop.* im Hause und noch eine größere Zahl habe ich durchblättert. Ich kann nicht läugnen, dass es mir sehr unangenehm ist zu finden dass ich den größten Teil meiner schönen Entdeckungen in der unbestimmten Analytik nun zum zweiten male gemacht habe. Was mich tröstet ist dieses. Alle Entdeckungen Früherer die ich bis jetzt gefunden habe habe ich auch gemacht, und noch einige mehr. Ich habe einen allgemeinem und wie ich glaube natürlichem Gesichtspunkt getroffen; ich sehe noch ein unermessliches Feld vor mir und Euler hat seine Entdeckungen in einem Zeitraume von vielen Jahren nach manchen vorangegangenen *tentaminibus* gemacht.

Dass Eulers Maxime zu den generellen Wahrheiten — und ebenso natürlich auch seine Vorstellungen über den Nutzen der *Speculationes mathematicae* —, grundlegend für den Weg von der Periodizität der Reste modulo 7 zu Gauß' eigenen Entdeckungen waren, scheint offenkundig. Was könnte also besser zu Gauß' erstem Projekt in der Mathematik passen als die Ankündigung in dem Brief an seinen Gönner Zimmermann vom 12. März 1797 ([20], p. 26):

Ich lege hier, Ew. Hochwohlgeb. Verlangen gemäss, einen etwas ausführlicheren Plan derselben bei; Sie werden daraus sehen, dass der Hauptzweck bloss sein kann den Verstand zu üben und neues Licht über Gegenstände zu verbreiten, die die größten Geometer unserer Zeit ihrer eifrigsten Untersuchungen gewürdigt haben. Mir scheint EULERS Ausspruch nicht unrecht zu haben »Semper cuiusquam problematis, quod a summis ingeniis frustra est tentatum, solutio maximi est momenti«. Und eben dieser große Mann hat an mehreren Orten geurtheilt, dass Untersuchungen dieser Art zur Übung des Scharfsinns noch dienlicher sind als selbst die Geometrie.

Bemerkung Wie André Weil in seiner Geschichte der Zahlentheorie anmerkt, begann bei Euler die geometrische Progression $1 a a^2 a^3 \dots$ der Reste erst nach dessen Umzug von St. Petersburg nach Berlin 1741 eine Rolle zu spielen — und zwar, als er nach seinem ersten Beweis für den Kleinen Fermat'schen Satz mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes begann, auf der Basis der multiplikativen Eigenschaften der Zahlen modulo einer Primzahl nach einem neuen Beweis zu suchen ([50] p. 172 und p. 194–207). Dies geschah aber erst, nachdem die *Arithmetica theoretico-practica* mit Fermats Satz in der Gestalt sich modulo 7 periodisch wiederholender Reste schon 1737 in Braunschweig erschienen war.

7 Noch einmal die Rechnung von 1737

Gut vierzig Seiten zuvor ([40], 259–261) war für diese erstaunliche Rechnung schon ein Rahmen bereitgestellt worden. Dabei erscheint zu Beginn von §. 82 ein Rechenrick, der aus Divisionen Multiplikationen macht — und damit ein weiteres Beispiel einer beim Rechnen mit Resten geltende Wahrheit zutage treten lässt. Bemerkenswert ist das &c. am Ende von §. 82, kann doch jetzt schon jeder das entdecken, was erst auf der Seite 304 kommt:

Beschreibung einer geometrischen Progression

§. 80. Wen eine Zahl 2 mit eben derselben 2, oder: einer anderen 3 multipliciret, und das Product abermal mit derselben multipliciret wird, und so weiter, so entstehen daher Zahlen, die in einer *Geometrischen Progression* aufsteigen: und die Zahl 2, oder: 3, damit sie aufsteigen, nennet man der Progression *Exponenten*: die Producte selbst aber: der Progression *Glieder*.

§. 81. *Der Rest von einem jeden höhern Gliede einer Geometrischen Progression, wenn es sowohl als der Exponente in ein gewisses Maas untheilbar, ist allezeit so groß, als der Rest des Products ist, welches aus der Multiplication des Restes des nechst vorhergehenden kleinern Gliedes mit dem Reste des Exponenten multipliciret, entsteht.*

z. E. 1 steigt mit 10 zu einer *Geometrischen Progression* auf durch 1.10.100.1000.10000.100000. etc. Diese Zahlen nebst dem *Exponenten* 10, sind in 7 untheilbar, darum soll der Rest von dem ersten *Producte* 10 gleich seyn, dem Reste von dem ersten Gliede 1 multipliciret mit dem Rest des *Exponenten* $10 : 7 = 3$. Der Rest des andern *Products* $100 : 7$ dem Reste von $10 : 7 = 3$ mit dem Reste des *Exponenten* $10 : 7 = 3$. Den da ein jedes Glied allezeit der *Faciendus*, und der *Exponente* der *Factor* von jedem Gliede der *Geometrischen Progression*, ist das Maas eines jeden Gliedes allezeit gleich dem Maas des Restes von dem *Producte* des vorhergehenden Gliedes und des *Exponenten* (vid. §. 79.)

§. 82. *Wenn man den Rest von dem kleinsten Gliede und Exponenten einer Geometrischen Progression weiß, so kann man den Rest vom jeden Gliede wissen, ohne solches erst in dem Numerum tertium zu dividieren.*

Denn weil die Glieder durch eben die Zahl ansteigen, so steigen auch die Reste durch eben die Zahl des Restes von dem ersten Gliede in dem Rest des *Exponenten* auf. Wenn also die Progression *Geometrica* folgende ist: 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.

So ist der Rest des ersten Gliedes = 1,

der Rest des andern Gliedes = dem Facto der Reste aus dem ersten Gliede, und dem *Exponenten* $10 = 3$.

Der Rest des dritten Gliedes = dem Rest aus Facto des Restes des andern Gliedes 3 in den Rest des *Exponenten* $3 = 9 = 7 + 2 = 2$.

Der Rest des 4ten Gliedes = dem Rest aus den Facto des Restes des dritten Gliedes 2 in den Rest des *Exponenten* = $2 \cdot 3 = 6$.

Der Rest des 5ten Gliedes = dem Rest aus den Facto des Restes des 4ten Gliedes 6 in den Rest des *Exponenten* $3 = 3 \cdot 6 = 7 + 7 + 4 = 4$.

Der Rest des 6ten Gliedes = dem Rest des Facti aus dem Rest des 5ten Gliedes in den Rest des *Exponenten* $3 = 3 \cdot 4 = 7 + 5 = 5$. &c.

§. 83. *Wen der Rest des Exponenten 1 ist, so ist der Rest aller Glieder gleich dem Rest des ersten Gliedes.*

Der unzulässige Gebrauch einiger der Gleichheitszeichen in §. 82 lässt an Daniel Shanks denken ([49] p. 55): »*But History did not introduce them earlier. Nor would it be in keeping with our title, "Solved and Unsolved Problems," for us to do so. To have a solved problem, there must first be a problem, and then a solution*«.

Offenbar kann das Manko der sensationellen Rechnung aus dem Jahr 1737 allein durch eine Definition und ein neues Symbol beseitigt werden. Geschieht nicht genau das zum Auftakt der *Disquisitiones Arithmeticae*? Weist Gauß nicht in einer Fußnote sogar auf das ganz konkrete Problem hin, das bei der Verwendung des neuen Symbols \equiv gar nicht entstehen kann? Und wurden nicht beim Rechnen mit Resten Beispiele viel versteckterer arithmetischer Wahrheiten sichtbar? Nur hat sich bisher halt niemand für die Seite 261 des seit 1918 bekannten Rechenbuches des genialen Kindes interessiert.

8 Eine Tafel mit den Dezimalbruchentwicklungen der gewöhnlichen Brüche

Als Gauß die Tafeln Schulzes geschenkt bekam, gab es ab 1791 plötzlich die ganz konkrete arithmetische Aufgabe, eine Tafel zu berechnen, *welche alle Brüche, deren Nenner unter 100 in Decimaltheilen ausgedruckt* enthält. Hat der *‘bescheidene, etwas schüchterne 14jährige Knabe’* diese Herausforderung direkt aufgegriffen? Zumindest trug Gauß bestimmt nicht zufällig 1793 seinen Namen — Carl Friedrich Gauß — in sehr schwungvoller und ungewöhnlich großer Schrift in Carl Friedrich Hindenburgs *Bescheibung* ein³ — erschienen doch Johann Carl Schulze die Vorarbeiten von Magister Hindenburg zu unreif. In diesem modernsten Gauß zur Verfügung stehenden Werk zur Arithmetik wird ab Seite 106 Wesentliches zur Division sowie der Erstellung einer Tafel mit den Dezimalbruchentwicklung der Brüche gesagt ([24], p. 106–116):

... Was hier von Decimal- und Sexagesimalbrüchen erinnert worden ist, kann hinreichend seyn, zu übersehen, wie man dergleichen Tafeln auch auf Brüche von anderen Benennungen, z. E. auf zwölftheilige u. s. w. anwenden und gebrauchen könne. Sie sind zu schneller Reduction der Brüche von verschiedenen Namen sehr bequem.

Unter vielen will ich nur eines einzigen, aber sehr oft vorkommenden Falls, gedenken, wie man nemlich gemeine Brüche leicht und ganz mechanisch in Decimalbrüche verwandeln könne. Diese Entwicklung ist mit der hier getroffenen Einrichtung so innigst genau verbunden, daß der Herr von Schönberg, sobald ich ihm sagte, daß die prompteste Auflösung einer solchen Forderung in meiner Gewalt wäre, sie auch sogleich für sich selbst und auf der Stelle, blos in Gedanken fand.

Bey der Division eines Nenners n in seinen Zähler mit den angehängten Nullen, können aufs höchste $(n - 1)$ erley Reste vorkommen, die beständig, durch Hinzusetzung einer Nulle aus dem Zähler, ein neues Dividend geben. Könnte man nun die Ordnung dieser Reste, so wie der aus ihnen, durch weitere Division des Nenners, entspringenden Theile des Hauptquotienten, im Voraus bestimmen: so würde man dadurch des oft so weitläufigen, und bey großen Zahlen höchst beschwerlichen Dividirens, ganz überhoben seyn. Wie das geschehen könne, will ich itzt an ein paar Beyspielen überzeugend darthun. In Nummer II der Beylage D, findet man die Verticalreihen mit den überstehenden Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, von der Rechten zur Linken gehend, bezeichnet. Gesetzt man soll den Bruch $\frac{1}{7}$ in Decimalstellen entwickeln: so nehme man von dieser Colonne, 7 waagerechte Reihen, d.i. die 70 Fächer;

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
						1				10
			2							20
3							4			30
				5						40
	6							7		50
					8					60
		9							10	70

schreibe, rechter Hand dieser Reihen die Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 untereinander; zähle die Zahl 7 wie bei der Aufsuchung der Factoren gezeigt worden ist, von der Linken zur Rechten, von dem 7ten Fache anfangend, nach und nach ab; und setze endlich in die so abgezählten Fächer, die Ordnungszahlen von 1 bis 10, wie solche in der Reihe aufeinander folgen.

Wenn man das so eingerichtete Parallelogram aufmerksam betrachtet, so wird man sogleich wahrnehmen, daß von den dreyerley Zahlen desselben, die zur Seite beygeschrieben, die möglichen Dividenden, wie solche nach und nach vorkommen können; die in der zugehörigen waagerechten Reihe zunächst eingeschriebenen, ihre Quotienten; die den Verticalreihen dieser Quotienten überschriebenen Zahlen, die correspondierenden Reste, geben werden. So gehört z.E. zu der Zahl 30, als Dividend, die in ihrer waagerechten Reihe zunächst eingeschriebene Zahl 4, als Quotient, und die darüber stehende Zahl 2, giebt den Rest. In eben der Reihe 30 steht zwar auch die Zahl 3 als ein Quotient, welcher den Rest 9 lassen würde; da man aber unter den möglichen Quotienten nur den beyhält, der einen kleinern Rest giebt als der Divisor (7) ist: so übergeht man hier die Cursivzahl 3,

³ Einen Scan der ersten beiden Seiten der *Beschreibung* verdanke ich Maarten Bullynck. In Lamberts *Zusätzen* trägt Gauß in Fraktur K. Gauß 1793 ein und in Euklids *Elementen* J. F. K. Gauß 1793 — nun beides in normaler Größe.

so wie die folgenden gleichartigen 6 und 9, welche insgesamt in den Abschnitt hinter dem höchsten Rest (6) zu liegen kommen; und so zeigt denn die Einrichtung von selbst im Voraus an, welche Zahlen Theile oder Glieder des Quotienten werden, und welche es nie seyn können. Diese Theile bey dem Bruche $\frac{1}{7}$ nach der Ordnung zu finden, verfährt man also:

7 in 1 kann man nicht haben, kommt also 0; der Rest 1 bestimmt das neue Dividend 10, das neben der ersten waagerechten Reihe steht, zu welchem die in dem zugehörigen Fache eingeschriebene 1 als Quotient, die überstehende 3 als Rest gehört; dieser zweyte Rest 3 bestimmt wieder ein neues Dividend 30, und dieses den Quotienten 4 und den Rest 2; dieser giebt für 20 den Quotienten 2 und den Rest 6; und so geben, 60 die Zahlen 8, 4; und 40 die Zahlen 5, 5; und 50 die Zahlen 7, 1; als Quotienten und Reste, so wie alle, auf die Art nach und nach gefundenen einzelnen Quotienten, als Glieder des Hauptquotienten, nebeneinander geschrieben, den Dezimalwerth des Bruches $\frac{1}{7} = 0,142857$ — mit seinen Perioden hinter den Ganzen. — Das bey dem eigentlichen Dividieren vorkommende Multiplizieren und Subtrahieren wird also dadurch in ein blosses Anweisen und Abschreiben verwandelt. Man könnte die zusammengehörigen Zahlen des Parallelograms, auf folgende Art, auch für sich allein, Dividenden und Quotienten nebeneinander, und darunter der Rest setzen

$$7) \begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline 20 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 30 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 40 & 5 \\ \hline 5 & \\ \hline 50 & 7 \\ \hline 1 & \\ \hline 60 & 8 \\ \hline 8 & \end{array}$$

Daß man auf die Art ebenso leicht den Decimalwerth von $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ finden könne, ist klar. Das erste Dividend wird nur verändert; Die Fortschreitung von einem Theiler des Hauptquotienten zu dem andern bleibt immer dieselbe.

Gleichwohl würde der Vortheil bey einem Bruche nicht beträchtlich seyn, dessen Nenner eine so kleine Zahl ist; aber er läßt sich auch auf Brüche für zwey oder mehrziffrige Nenner mit Leichtigkeit anwenden und verdient daher Aufmerksamkeit.

Nach zwei weiteren Beispielen mit den Brüchen $\frac{1}{29}$ und $\frac{1}{47}$ und der geradezu monströsen Darstellung aller Teile des Hauptquotienten von $\frac{1}{47}$ geht es dann folgendermaßen weiter:

Es fragt sich, (1) ob man diese Anordnung nicht noch näher und geschwinder, und ob man (2) auch zwei Ziffern dieses Hauptquotienten auf einmal finden könne.

Die erste Frage ist im Vorhergehenden bereits bejaht worden; hier will ich die Auflösung geben, wie ich sie nachher gesucht habe. Zu den Primzahlen 11, 13, 17, 19 gehören folgende Reste nach der Ordnung:

zu	11	die	Reste	10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1
“	13	“	“	10; 7; 4; 1; 8; 5; 2; 9; 6; 3
“	17	“	“	10; 3; 6; 9; 2; 5; 8; 1; 4; 7
“	19	“	“	10; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Der Fortgang dieser Reste, so wie ihre Symmetrie bey 11 und 19, fällt in die Augen. Eben diese Reste finden auch bey den höheren, auf 1, 3, 7, 9 sich endigenden Primzahlen statt. Die Quotienten wachsen, wie bekannt, von 0 bis 9. Man darf also nur wissen, wo jeder in seiner Ordnung, zuerst vorkommt, und was für ein Rest darzu gehört. Das letztere ist durch die voranstehende Anzeige des Fortgangs der Reste überhaupt gegeben; das erstere findet man durch blosser Erhöhung des vorhergehenden Restes, so lange solcher den Zähler nicht übersteigt; und so findet man aus dem, allen Zahlen gemeinschaftlichen Anfange 1, 0, 10, aus dem Fortgange der Reste, und aus dem gegebenen Nenner des Bruchs, alle Quotienten und Reste, wie solche nach und nach zu den natürlichen Zahlen von 1 bis n , gesetzt werden müssen.

Schließlich heisst es dann auf der Seite 116:

Es ist klar, dass dieses eine in die Augen fallende Symmetrie geben müsse. Das Gesetz dafür aufzusuchen und zu erweisen, habe ich jetzt noch nicht Zeit gehabt. Dieses, nebst verschiedenen anderen Untersuchungen, was aus der Einrichtung für die in einem fortgehenden Brüche (*fractiones continuæ*) für die Exponenten, u. s. f. folgt, bleibt also dermalen noch zurück, bis Zeit und Umstände zu deren Entwicklung mehr Muße gestatten werden.

Mit Remers *Arithmetica* besaß Gauß aber schon sechs Jahre bevor er 1791 Schulzes Tafeln in die Hand bekam ein Rechenbuch, das Fermats Satz in der Gestalt sich modulo 7 periodisch wiederholender Reste enthält.

Mit Gauß' neuer Methode liefert die geometrische Progression der Reste 1 3 2 6 4 5 modulo 7 ([40] p. 303–304) auf Anhieb auch gleich eine Verfahren, um mit dem kleinen

Einmaleins im Kopf die Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ schrittweise Ziffer für Ziffer zu notieren, und zwar ohne dass dabei der auch in Hindenburgs Überlegungen im Hintergrund wirkende *deus ex machina* des Divisions-Algorithmus' ins Spiel kommt — von dem jede Generation meint, diesen als unabdingbares Element des Kulturgutes Mathematik an die jeweils nächste Generation weitergeben zu müssen, ohne dass auch das elementare Rechnen einmal der längst überfälligen Revision unterzogen worden wäre:

Reste	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	...
	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	...			
Quotienten	1	4	2	8	5	7	1	4	2	...	

Weil die Reste modulo 7 eine periodische geometrische Progression bilden, muss sich offensichtlich auch die Ziffernfolge 142857 in der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ periodisch wiederholen. Dass Entsprechendes auch — *mutatis mutandis* — für jede andere Primzahl gilt, leuchtet unmittelbar ein, denn: »*Es gibt allgemeine Wahrheiten, die unser Verstand bereit ist aufzunehmen, sobald er in einigen besonderen Fällen deren Richtigkeit erkannt hat!*« Allerdings gibt es hier ein wichtiges Phänomen, auf das Gauß in Artikel 45 hinweist: »*In einigen Fällen also wird schon eine Potenz mit kleinerem Exponenten als $p - 1$ der Einheit congruent, in andern dagegen muss man bis zur $p - 1$ ten Potenz aufsteigen.*«

Daniel Shanks gibt im Abschnitt *Primitive Roots with a Prime Modulus* seiner *Solved and unsolved Problems in Number Theory* die entscheidende Definition der Ordnung e eines Elements a modulo m und ergänzt diese mit einem Kommentar ([49], p. 72):

EXAMPLE: If $a = 10$ and m is a prime $\neq 2$ or 5 , then the order e is also the period of the periodic decimal $\frac{1}{m}$. Thus 10 is of order 3 modulo 37, as on page 55. (It is probable that this definition, and Definition 23, Theorem 35, and Theorem 36 which follow, all stem from Gauss's early studies in periodic decimals mentioned on page 53. See Exercise 8S on page 203 for a plausible reconstruction of Gauss's line of thought.)

Überraschend zeigt es sich, dass für jede gegebene Primzahl p ein Element höchstmöglicher Ordnung $p - 1$ gefunden werden kann. Auch hier scheint es also wieder so, als sei eine der allgemeinen Wahrheiten wirksam, die unser Verstand direkt bereit ist aufzunehmen.

Gauß selbst sagt zur Berechnung einer Perioden-Tafel am Ende des Passus über die *Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche* in Artikel 318 ([16] p. 373):

Übrigens könnten wir über diesen Gegenstand noch viele andere Bemerkungen hinzufügen, besonders in Bezug auf die Kunstgriffe, welche man anwenden kann, um eine solche Tafel wie III möglichst schnell zu construieren; doch unterdrücken wir dies an dieser Stelle der Kürze wegen um so lieber, da mehreres hierher gehörige sowohl von Robertson a. a. O., als auch von Bernoulli (*Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin 1771, p. 273*) bereits angegeben worden ist.

Zu dem für die Berechnung der Dezimalbruch-Perioden wesentlichen Faktum — der *verités generale*, dass »*die Reste der Glieder einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Reihe eine periodische Reihe bilden*« — muss nichts gesagt werden, war doch die Ausarbeitung dieser Wahrheit das wesentliche Thema des dritten Abschnitts. Und weil Gauß den *Sechsten Abschnitt* der *Disquisitiones Arithmeticae* mit verschiedenen Anwendungen der vorhergehenden Untersuchungen mit den Worten beginnt, »*Wie fruchtbar die höhere Arithmetik an Wahrheiten ist, welche auch in andern Teilen der Mathematik Nutzen gewähren, haben wir bereits an mehreren Stellen vorübergehend berührt; wir haben es aber für nicht unnützlich gehalten, gewisse Anwendungen, welche eine ausführlichere Auseinandersetzung verdienen, für sich zu behandeln, nicht sowohl um diesen Gegenstand, mit dem man leicht mehrere Bände füllen könnte, zu erschöpfen, als vielmehr ihn durch einige Proben in ein helleres Licht zu setzen*«, irritiert es, dass Felix Klein bei der Beschreibung der *ersten, vorhistorischen Periode* in seinen *Vorlesungen* nicht auch Gauß' Wertschätzung für das praktische Rechnen in seine Überlegungen einbezog ([25], p. 31):

Ein natürliches Interesse, ich möchte fast sagen, eine gewisse kindliche Neugier, führen den Knaben unabhängig von allen äußeren Einflüssen zuerst auf mathematische Fragen. Und zwar ist es das reine Handwerk des Zahlenrechnens, das ihn zunächst anzieht. Er rechnet immerfort mit einem geradezu überwältigenden Fleiß und nicht zu ermüdender Ausdauer. Durch diese fortwährende Übung im Handhaben der Zahlen, z. B. Dezimalbrüchen von unglaublicher Stellenzahl, erwirbt er sich nicht nur die erstaunliche Virtuosität der Rechentechnik, die ihn zeitlebens auszeichnete; ...

und

... Wir begegnen hier aber einer seltsamen und gewiss nicht zufälligen Erscheinung. Alle diese frühen, nur zu eigener Lust ersonnenen Gedankenspiele sind Ansätze zu dem großen, erst viel später bewusst gewordenen Ziel. Es ist eben die ahnende Weisheit des Genies, selbst bei den halb-spielenden Erstlingsproben der Kräfte, ohne Bewusstsein des tieferen Sinnes die Spitzhacke gerade da ans Gestein zu setzen, wo die Goldmine verborgen liegt. ...

... Unbekannt mit jeglicher Literatur, muß er sich alles selbst erschaffen. Auch hier ist es wieder der unermüdliche Rechner, der die Wege ins Unbekannte bahnt. Gauss legt große Tabellen an, der Primzahlen, der quadratischen Reste und Nichtreste, der Brüche $\frac{1}{p}$ für $p = 1$ bis $p = 1000$ in Dezimalbrüchen ausgedrückt, und zwar bis zur vollen Periode, was unter Umständen eine Stellenzahl von mehreren Hundert bedeutet! Bei dieser letzten Tabelle verfolgte Gauß den Zweck, die Abhängigkeit der Periode vom Nenner p kennenzulernen. Welcher heutige Forscher würde wohl diesen seltsamen Weg einschlagen, um einen neuen Satz zu finden? Für Gauß führt gerade dieser Weg, den er mit ungeheurer Energie verfolgte — er selbst behauptet, daß er sich von anderen Menschen nur durch seinen Fleiß unterscheide! — zum Ziel.

Auf der Basis der Tabelle mit den Dezimalbruchentwicklungen der Inversen der Primzahlen und Primzahlpotenzen unterhalb 100 kann mit den Resultaten des sechsten Abschnitts der *Disquisitiones Arithmeticae* ([16] p. 364–373) nämlich nun auch an die Ausarbeitung einer für die Praxis bestimmten Tafel gedacht werden, wie Schulze sie in seine Sammlung aufnehmen wollte und wie Herr Mag. Hindenburg sie nicht ablieferte. Für die nötigen Rechnungen steht in Artikel 317 der *Disquisitiones* ein Muster bereit ([16], p. 371), so dass »jedem gemeinen Rechner sogleich« ([24], p. 112) deren Anfertigung übertragen werden kann. Wäre ein solches Projekt nicht ganz im Sinne des 1777 — im Geburtsjahr von Gauß — gestorbenen Johann Heinrich Lambert, der gleich am Beginn der Einleitung seiner *Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln* sagt ([29] p. 1) ?

Diejenigen, so die Mathematick nicht bloß lernen, sondern sodenn wirklich Gebrauch davon machen, können aus eigener Erfahrung wissen, daß es Zahlen, Verhältnisse, Formeln und Rechnungen giebt, die eben daher, daß sie öfters vorkommen, ein für alle mal gemacht und aufgezeichnet zu werden verdienen, damit man der Mühe, sie immer wieder von neuen zu finden oder zu berechnen, überhoben seyn könne.

9 Weitere Nachrichten und Bemerkungen zum Rechenbuch von Gauß

Zu dem Rechenbuch selbst gibt es die folgenden Informationen:

1. Ludwig Schlesinger teilte in Band X_2 der Werke mit ([46] p. 10), dass Remers *Arithmetica* sich mit der Eintragung: »Johann Friedrich Carl Gauss, Braunschweig, 16. December Anno 1785 noch in der Gaussbibliothek befindet und ebenso wie das Exemplar von HEMELINGS Arithmetischem kleinen Rechenbuch Spuren starker Benutzung und zwischen dem Text einige von GAUSS' kindlicher Hand ausgeführte elementare Rechnungen zeigt«
2. Der Titel dieses Berichts zu Carl Friedrich Gauß und seinem Rechenbuch rührt her aus der 1928 von Philipp Maennchen veröffentlichten *Methodik des Mathematischen Unterrichts*, die zehn Jahre nach seinem Artikel in den *Nachr. d. K. Ges.* erschien. Einer größeren Öffentlichkeit ist dieses erstaunliche Buch mit bemerkenswerten Gedanken zur Schulmathematik anscheinend nicht bekannt geworden ([33], p. 17):

... Die erste Frage, wie es kam, dass solche Ideen über das Zahlenrechnen bei Gauß auftauchten, wird wohl jeder Kenner der zu Gauß' Jugendzeit üblichen Rechenbücher und Rechenmethoden dahin beantworten, dass es eben Eingebungen seines überragenden Genies waren, die keinerlei Voraussetzungen bedürfen. Denn ich habe ja schon auf S. 8 und 10 kurz auf jene Methoden und Bücher hingewiesen, in denen jeder Versuch einer verständlichen Begründung fehlte, und wo das Rechnenlernen nichts anderes war, als das mechanische Auswendiglernen von Ausführungsbestimmungen. Sieht man jedoch näher zu, so findet man gelegentlich unter diesem Wust von nichtssagenden Regeln und Künsteleien doch auch hie und da Spuren von individualisierendem Rechnen, vielleicht Rudimente einer älteren, untergegangenen Methode. Das ist mir vor Jahren beim Studium von Sterners Geschichte der Rechenkunst bereits dunkel ins Bewusstsein getreten; zur vollen Überzeugung wurde es mir dadurch, dass ich die Gelegenheit hatte, das Rechenbuch kennenzulernen, das Gauß im Alter von 8 Jahren als Geschenk erhielt. Dieses Buch, das sich noch heute im Gaußarchiv befindet, das Rechenbuch von Remer, hat zwar auch vielerlei Rezeptartiges, wie es der Sitte jener Zeit entsprach, aber es finden sich darin auch Kapitel, namentlich über die Multiplikation, in denen die Zahlen individualisiert werden. Sicherlich hat Gauß mit seinem angeborenen Zahlensinn die Bedeutung dieser Kapitel früh erfaßt; das beweist die Tatsache, daß er in echt kindlicher Weise auf die Innenseite des Deckels schrieb: „Liebes Büchlein“. Man darf also vermuten, daß dieses Rechenbuch einen nicht unerheblichen Anteil an Gauß' Entwicklung zum individualisierenden Zahlenrechner gehabt hat.

Offenbar wurde Ludwig Schlesinger durch die *Spuren starker Benutzung* und die Tatsache, dass zwischen dem Text einige von GAUSS' kindlicher Hand ausgeführte elementare Rechnungen zu sehen sind, aber nicht dazu angeregt, diese Rechnungen im Detail zu verfolgen; und auch Philipp Maennchen wurde durch die berührende Anrede „Liebes Büchlein“ anscheinend nicht beflügelt, den *Anderen Abschnitt* des Rechenbuches einmal genauer unter die Lupe zu nehmen, in dem die Zahlen nun in einer Weise individualisiert werden, wie es ein im zwanzigsten Jahrhundert sozialisierter Rechner kaum nachvollziehen kann. So entging den beiden Gießener Autoren von Band X_2 der Werke, dass der knapp 700seitige Schmöker mehr zum Rechnen enthält, als unsere Schulweisheit sich träumen lässt.

Karin Reich, Mathematikhistorikerin und Autorin zweier Gauß-Biographien ([36], [2]), hat sich mehrmals mit Remers *Arithmetica* befasst. In ihrem Aufsatz 'Der junge Gauß und seine Welt der Mathematikbücher' heißt es 2005 zum Inhalt des Buches ([38], p. 37/38): *Das Werk beinhaltet alles, was ein Anfänger wissen muss, vor allem die Grundlagen des kaufmännischen Rechnens sowie die arithmetischen Grundkenntnisse, auf denen dann aufgebaut werden konnte.* < Auf der Seite davor heißt es ([38], p. 36): *»Auch ein Gauß konnte am Beginn und während seiner Schulzeit keine wissenschaftlichen Werke verstehen, sondern er musste, wie jeder Schüler auch, zunächst mit Hilfe relativ elementarer Werke sein Wissen erweitern, sich sichere Kenntnisse im Rechnen aneignen und einfache algebraische und geometrische Aufgaben lösen lernen. Solche elementaren Kenntnisse vermittelten insbesondere die Schriften von sogenannten Rechenmeistern ...* < Bringen nicht diese Worte die grundsätzlichen Probleme von Experten mit dem Rechenbuch eines Kindes auf den Punkt?

Die Anrede „Liebes Büchlein“ auf der Innenseite des Buchdeckels erzeugte aber einfach auch Neugier auf die von Gauß' kindlicher Hand ausgeführten Rechnungen. Daher kam die Nachricht wie ein Schock, die Martha Küssner in *Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher* 1979 verkündete ([27] p. 75):

Die Gauss Bibliothek enthält noch „Das kleine Rechenbuch“ von J. Hemeling des Schülers Gauss; dagegen fehlt das Buch von C.S. Remer, das Schlesinger mit der Namenseintragung noch gesehen hat.

Die auf der Hand liegende Frage, ob Gauß in seinem Rechenbuch bereits alle diejenigen Gleichheitszeichen auf der Seite 261, die eine Zweideutigkeit beim Rechnen entstehen lassen, durch einen dritten Strich ergänzte und damit das charakteristische Symbol \equiv der höher-

en Arithmetik in seinem eigenen Rechenbuch möglicherweise zum ersten mal sichtbar werden ließ, kann daher nicht mehr durch einen Blick in sein „Liebes Büchlein“ geklärt werden.

Und leider wird sich daran wohl auch so lange nichts ändern, wie das Buch sich nicht an demjenigen Ort befindet, den Helmut Rohlfing, Direktor der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, in dem Festvortrag mit dem Titel *Das Erbe des Genies* beschreibt, den er anlässlich des 40-jährigen Bestehens der Gauß-Gesellschaft e.V. am 25. Oktober 2002 hielt ([43] p. 22):

Das bedeutendste Lebensdokument des jungen Gauß ist das Mathematische Tagebuch (Abb. 6), das in der Bibliothek nicht ohne Grund zu den wertvollsten Handschriften zählt und deshalb in einem besonders sicheren Safe verwahrt wird.

Das aus dem Erbe des Genies verschwundenen Rechenbuch, das ja zusammen mit der letzten Seite der Leistenotizen als Beweisstück für einen in der Menschheitsgeschichte einmaligen Vorgang verstanden werden kann, wird in dem Festvortrag von 2002 nicht erwähnt.

Schon 2001 gab es zum Verbleib von Remers *Arithmetica* die folgende Mitteilung in einer Email von Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke*:

13. Juli 2001: ... inzwischen bin ich im zweiten Band des Akzessionskatalogs der Sternwarte (Cod. Ms. Sternwarte 36:2) fündig geworden. Die Eintragung lautet:
4368 Chr. Steph. Remer: *Arithmetica theoretico-practica*. Das ist: Anweisung zu der Arithmetique. Braunschweig 1737. Nr. 435 [der Gauss-Bibliothek] (?)
Es ist natürlich sehr betrüblich, dass sich die Umstände dieses Verlustes nicht mehr klären lassen werden. Die Werke der Gauss-Bibliothek erhielten bei Übergabe an die Universitätsbibliothek eine neue Numerierung. Die Eintragungen im Akzessionskatalog der Sternwarte schließen im allgemeinen mit der Angabe der neuen Signatur ab. Das Fragezeichen beim Remerschen Titel ist wohl so zu interpretieren, dass das Buch bei Vergabe der neuen Signatur nicht mehr auffindbar war.

Wäre nach der Aufdeckung des Bandes zwischen der *Arithmetica theoretico-practica* und den *Disquisitiones Arithmeticae* jetzt nicht die Suche nach dem bedeutendsten Lebensdokument des Kindes Johann Friedrich Carl Gauss eine weitere unter den *Aufgaben zur Pflege des Erbes von Carl Friedrich Gauß*, von denen Helmut Rohlfing im letzten Abschnitt — *Künftige Aufgaben* — in seinem Festvortrag spricht ([43] p. 22)? Und gehört nicht zur Pflege des *Erbes des Genies* auch die Fahndung nach der Signatur und dem Standort desjenigen Buches, das Gauß einst für sein unter der Titelzeile *I d e a l* meisterhaft komponiertes Blatt vorgesehen hatte?

10 Die letzte Seite der Leistenotizen

Anscheinend war Karin Reich 2005 die erste, die über die bemerkenswerte Seite der Leistenotizen berichtete, genauer, über Eulers lateinisches Zitat. Aus Anlass der 150. Wiederkehr des Todestages von Gauß hatten die Georg-August-Universität, die Stadt Göttingen und die Gauß-Gesellschaft e.V. das GAUSSJAHR 2005 proklamiert. In Verbindung mit diesem gab es die Ausstellung, „*Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst — Carl Friedrich Gauß in Göttingen*“. In Karin Reichs Aufsatz *‘Gauß’ geistige Väter: nicht nur „summus Newton“, sondern auch „summus Euler“* — einem ihrer drei Beiträge zu den Göttinger Bibliotheksschriften 30 — erscheint dann neben dem lateinischen Original auch eine deutsche Übersetzung ([38], p. 107):

Wann Christian Leistes (1738–1815) „Die Arithmetik und Algebra“ (Wolfenbüttel 1790) in den Gauß-Nachlass gelangte, ist nicht bekannt. Gauß ließ in dieses Werk leere Blätter einfügen, seine auf ihnen vermerkten Aufzeichnungen bezeichnet man daher als „Leistenotizen“. Dort findet man u.a. handschriftlich eingetragene Listen von Werken Lagranges und Eulers. Während die erste Seite

einen Spruch Lagranges enthält, enden die Leistenotizen mit folgendem Auszug aus Euler:

„Ideal.

Wenn wir auf ihre Nützlichkeit blicken, scheinen mathematische Überlegungen auf zwei Klassen zurückgeführt werden zu müssen; in die erste sind diejenigen aufzunehmen, die sowohl für das tägliche Leben wie für die anderen Künste irgendeinen bedeutenden Vorteil bringen, weshalb ihr Wert nach der Größe dieses Vorteils festgelegt zu werden pflegt. Die zweite Klasse aber umfasst diejenigen Überlegungen, die, auch wenn sie mit keinem bedeutenden Vorteil verbunden sind, dennoch so beschaffen sind, dass sie Gelegenheit bieten, die Grenzen der Analysis hinauszuschieben und die Kräfte unseres Geistes zu schärfen. Da wir nämlich gezwungen werden, die meisten Untersuchungen, von denen der größte Nutzen erwartet werden könnte, allein wegen des mangelhaften Zustandes der Analysis aufzugeben, scheint diesen Überlegungen kein geringerer Wert zuzuordnen zu sein, die keine verachtenswerten Zuwächse der Analysis versprechen.“

Bis auf den hier weggelassenen lateinischen Originaltext ist dies im Wesentlichen alles, was zu dem Blatt der *Leistenotizen* gesagt wird.

Sechs Jahre später geht es dann in dem Aufsatz, ‘*Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkrantz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten*’, 2011 noch einmal um dieses Blatt, und nun heißt es auf einmal: »Die „Leiste Notizen“ enden mit zwei Zitaten aus Werken von Euler«. Überraschend wird dem Leser nun auch Eulers französisches Motto preisgegeben.

In dem Kommentar, der sich den den Zitaten anschließt, heisst es zu der besonderen Beziehung von Gauß zu Euler: »So machen bereits die Leiste-Notizen klar, welch überaus große Bedeutung Euler für den jungen Gauß hatte. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass Gauß, als er in Göttingen 1795 sein Studium begann, auch zahlreiche Werke Eulers in der dortigen Universitätsbibliothek auslieh und danach trachtete, für seine eigene Bibliothek möglichst viele der Werke Eulers erwerben zu können.« — Die Signatur [Gauß-B. 45] der Gauß-Bibliothek auf dem Blatt der Notizen dokumentiert allerdings unübersehbar deutlich, dass es ursprünglich gar nicht den zu den von Gauß hinterlassenen Notizen gehörte.

Der für den gebildeten Experten nur schwer einschätzbare Eintrag ‘*Au sujet du theorem de Fermat: $a^m \equiv a$* ’ wird auch in diesem zweiten Aufsatz zu Euler weggelassen. Doch stiftet nicht erst Fermats Satz eine Beziehung zwischen dem unter dem Motto *I d e a l* versammelten Text-Material zu Euler u. a. und wird nicht Gauß’ vollendete Komposition nicht erst auf diese Weise zu einem sinnvollen Ganzen?

Wie sich gleich zeigen wird, hatte Gauß aber dieses Kapitel der Arithmetik längst hinter sich gelassen, als er zum Studium nach Göttingen aufbrach ([20], p. 20). Es gibt nämlich

11 Eine weitere bislang noch unerschlossene Quellen

»Erst die Nachwelt ist imstande, die Frage nach Gauß’ wissenschaftlichem Besitz zu entscheiden, und sie fördert Schätze zutage, die alle Erwartungen weit übertreffen« heißt es bei Felix Klein in den *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik* ([25], p. 29), und auch 200 Jahre nach der Publikation der *Disquisitiones Arithmeticae* können neue Fragen an die bekannten Quellen noch immer Schätze zutage fördern.

In einem Brief aus Göttingen berichtet Gauß am 26. Mai 1796 dem Hofrat Zimmermann von einer Fragestellung in der Arithmetik, die ihn schon länger beschäftigt hatte ([20], p. 24):

Ich muß noch etwas über den Fortgang meiner eigentlich analytischen Untersuchungen sagen. Ich habe in den Memoires von Paris 1785 eine vortreffliche Abhandlung von Le Gendre gefunden wo ein Beweis von dem Lehrsatz, den ich so lange vollständig zu beweisen umsonst gesucht hatte vorkommt aber wo gerade das angenommen wird (je ne suppose que ce que . . . sagt I.G. [Le Gendre]) was allein mir seit beinahe einem Jahre noch fehlte und was ich nunmehr gefunden habe.

und weiterhin:

Ich glaube es also jetzt wagen zu können wenn ein Buchhändler sich findet an die Ausarbeitung zu gehen.

Daß Lateinische Sprache für diese Materie in gewissem Betracht glücklicher sein würde als die Deutsche sehe ich selbst ein und ich würde gar nicht unschlüssig sein, wenn nicht jene nicht nur mich eine ungleich größere Zeit kosten, sondern mich auch von einer andern Seite der Kritik aussetzen würde. Ich denke also das Buch erst deutsch auszuarbeiten und vielleicht nachher wenn ich Muße habe es zu übersetzen. — In Absicht des Titels bin ich sehr gleichgültig: [...] Am liebsten sagte ich: Theorie der quadratischen Reste nebst andern verwandten Untersuchungen.

In der Vorrede zu den *Disquisitiones Arithmeticae* wird das neue Vorhaben dann in einen größeren Zusammenhang gerückt. Dabei bleibt dann die Frage offen, was in dem Zeitraum geschah, bevor Gauß sich begann für die *Theorie der quadratischen Reste* zu interessieren:

Der Zweck dieses Werkes, dessen Herausgabe ich schon vor fünf Jahren versprochen hatte, war der, die Untersuchungen aus der höheren Arithmetik, die ich teils vor teils nach jener Zeit angestellt habe, zur allgemeineren Kenntnis zu bringen. Damit sich aber Niemand wundere, dass ich die Wissenschaft hier fast von ihren ersten Anfängen an wiederholt und viele Untersuchungen von Neuem aufgenommen habe, mit denen sich schon andere beschäftigt haben, glaube ich darauf hinweisen zu müssen, dass ich, als ich mich zuerst im Anfange des Jahres 1795 dieser Art von Untersuchungen zuwandte, von allem dem, was von Neueren auf diesem Gebiete geleistet worden war, nichts wusste and aller Hilfsmittel durch welche ich mir davon hätte einige Kenntnis verschaffen können, baar war. Während ich nämlich damals mit einer andern Arbeit beschäftigt war, stieß ich zufällig auf eine ausgezeichnete arithmetische Wahrheit (wenn ich nicht irre, war es der Satz des Artikels 108), und da ich dieselbe nicht nur an und für sich für sehr schön hielt, sondern auch vermutete, dass sie mit anderen hervorragenderen Eigenschaften im Zusammenhang stehe, bemühte ich mich mit ganzer Kraft, die Prinzipien, auf denen sie beruhte, zu durchschauen and einen strengen Beweis dafür zu erhalten. Als mir dies endlich nach Wunsch gelungen war hatten mich die Reize dieser Untersuchungen derart umstrickt, dass ich sie nicht mehr verlassen konnte; so kam es, dass, während das Eine immer zu dem Andern den Weg bahnte, das in den vier ersten Abschnitten dieses Werkes Mitgeteilte grösstenteils erledigt war, ehe ich von ähnlichen Arbeiten anderer Geometer etwas zu Gesicht bekommen hatte.

In einer Skizze zur Entstehung der *Disquisitiones Arithmeticae* stützt Norbert Schappacher sich in seiner Einleitung zu dem 2006 im Georg Olms Verlag erschienenen Nachdruck wohl — wie vor ihm auch schon Felix Klein — auf diese Vorrede ([17], p. V*), dabei eingeschlossen Gauß' Mitteilung in dem Brief an Zimmermann: *Am liebsten sagte ich: Theorie der quadratischen Reste nebst andern verwandten Untersuchungen*:

Seine ersten Beweise in der Zahlentheorie (die auf eine mehrjährige Phase numerischer Experimente in diesem Gebiet folgten) und somit die ersten systematischen Bausteine der *Disquisitiones Arithmeticae* datieren, wie Gauß selbst in der Praefatio der *Disquisitiones Arithmeticae* schreibt, auf Anfang 1795, also deutlich vor seinem 18. Geburtstag und etwa neun Monate bevor er im Herbst 1795 als Student nach Göttingen geschickt wurde, ...

Dem folgt ein instruktiver Abstecher in die Geschichte der Künste, in der sich »im Schaffen großer Meister dergleichen Würfe, die Jugendlichkeit und Reife vereinen«, finden lassen.

In *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* wird die mehrjährige Phase numerischer Experimente durch die Angabe einer Jahreszahl abgerundet, »Gauss began to investigate arithmetical questions, at least empirically, as early as 1792« ([23], p. 5). Und zur Neuerscheinung von 2007 heißt es stolz auf der Web Seite des Springer Verlages: "A book that traces the profound effect Gauss's masterpiece has had on mathematics over the past two centuries. ... The shaping of arithmetic is a major accomplishment, one which will stand as an important reference work on the history of number theory for many years. (Victor J. Katz, *Mathematical Reviews*, Issue 2008 h)"

Bei dem Versuch, mehr über die Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae* zu erfahren, stellte sich von selbst auch die Frage, um was es denn bei der *andern Arbeit* ging, von der Gauß in der *Praefatio* spricht. Im schriftlichen Nachlass gibt es auch zu dieser Frage eine weiterführende handschriftliche Quelle — und diese ist bereits seit 1863 bekannt.

Im Auftrag der Göttinger Akademie der Wissenschaften hatte Ernst Schering die ersten Bände der Werke von Gauß herausgegeben und dabei auch die Tafel mit den Dezimalbruch-Perioden für den Abdruck in den Werken bearbeitet ([44] p. 411–434). Auf diese Quelle wird in der schon genannten Nachlassliste der Gauß-Bibliothek unter der Signatur Math 17 Dezimalbruchtafeln hingewiesen. In anschließenden Bemerkungen zu seiner Bearbeitung beschreibt Schering Gauß' Tafel ([44] p. 497):

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen p^r welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2)...(0) der Decimalbrüche von $\frac{10^r}{p^r}$, $\frac{10^{2r}}{p^{2r}}$, ..., $\frac{10^r}{p^r}$, worin r die Einheit bedeutet, also (1) = (2) = ... (0) wird, wenn r Primativwurzel von p^r ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primativwurzeln von p^r bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r hat man zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefügt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^r zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^r}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October 11. 1795*. Im Drucke ist beim Theiler 191 Periode (1) die 71^{ste} Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151 und 152^{sten} Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Diese Schilderung suggeriert eine einheitliche Struktur der 17 doppelseitigen Manuskriptblätter. In den knapp 150 Jahren nach Schering hat sich anscheinend niemand mehr für sie interessiert. Deren Inspektion zeigt dann aber, dass Scherings Bearbeitung der Originalblätter ein Idealbild herstellte, das den Entstehungsprozess der Tafel ausklammert.

Kopien von vier der Manuskriptblätter werden am Schluß dieser Arbeit gezeigt. Drei von ihnen haben die Titelzeilen, '*Periodorum quas servant fractiones communes per decimales expressae tabula*' (Nr. 11), '*Fractionum communium per fractiones decimales expressarum periodi*' (Nr. 17) und '*Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche*' (Nr. 15), die nahe legen, dass sie der Berechnung der Dezimalbruchentwicklungen gewöhnlicher Brüche dienen, und weil Blatt 15 auch die Perioden der Potenzen 9, 27, 81 und 49 enthält, ist es schon für die Ausarbeitung einer Tafel á la Schulze geeignet.

Aus dem Rahmen fällt die Rückseite des mit ⑨ markierten Manuskriptblatts. Sie zeigt schachbrettartige Muster, die unschwer mit dem von Gauß genannten *Satz des Artikels 108* in Verbindung gebracht werden. Der Zahlentheoretiker Paul Bachmann beschreibt in seinem Aufsatz *Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten* die Tafelsammlung mit den Worten ([1] p. 4): »Sie besteht aus zwei Theilen, deren zweiter in der Handschrift des Nachlasses den Vermerk trägt: *explicitus October 11. 1795*». Ob er Blatt ⑨ mit diesem Vermerk einmal in der Hand hatte, erscheint fraglich, denn der *Satz des Artikels 108* wird in seinem Werke–Beitrag ausführlich diskutiert ([1] p. 12–14).

Abgesehen von der Rolle dieses noch nicht durchleuchteten Fundes für die Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae*, legt Blatt ⑨ natürlich auch nahe, mit welcher anderen Arbeit Gauß beschäftigt war, als er zufällig auf die arithmetische Wahrheit stieß: Sie bestand wohl aus der Anfertigung der Tafel zur '*Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche aus dem ersten Tausend*'.

Das *Explicitus October. 11. 1795* kann als Abschluss der ersten Phase in der Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae* gesehen werden, die mit der Entdeckung der Periodizität der Reste modulo 7 in Remers *Arithmetica* begann und über Fermats Satz bis hin zum Satz von der Existenz einer primitiven Wurzel führte, dem entscheidenden theoretischen Werkzeug dafür, dass die Tafel zur '*Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche*' beliebig ausgedehnt werden kann.

Zur Existenz einer primitiven Wurzel heißt es in Artikel 55: »Die grösste Beachtung aber verdient ein besonderer Fall des vorigen Satzes, nämlich dass es immer Zahlen giebt, deren niedrigste Potenz, welche der Einheit congruent ist, die $p - 1^{\text{te}}$ ist, und zwar ebenso viele zwischen 1 und $p - 1$, als es unterhalb $p - 1$ zu $p - 1$ prime Zahlen giebt.« Zu dessen Beweis in Artikel 55 wird angemerkt: »... so wollen wir wegen der Bedeutung des Satzes noch einen andern von dem vorigen etwas verschiedenen Beweis anfügen, zumal die Verschiedenheit der Methoden gewöhnlich sehr viel zur Erläuterung etwas schwerer verständlicher Dinge beiträgt.« In den ersten Beweis gehen 'einige besondere Sätze' aus dem zweiten Abschnitt mit Hinweisen auf Euler und Lagrange ein, also auf Autoren, die Gauß in der Zeit vor seinem Umzug nach Göttingen noch nicht kannte.

Das wesentliche Hilfsmittel im zweiten Beweis ist offenbar der Satz in Artikel 15: »Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich nur auf eine einzige Weise in Primfactoren zerlegen.« Dessen Beweis leitet Gauß mit den Worten ein: *Dass jede zusammengesetzte Zahl in Primfactoren zerlegt werden kann, ist aus den Anfangsgründen bekannt; dass dies aber nicht auf mehrere verschiedene Arten geschehen könne, wird mit Unrecht meistens stillschweigend angenommen.* So schließt das *Explicitus October. 11. 1795* einen Zeitabschnitt ab, der dann vom Frühjahr 1795 an in ein neues Vorhaben einmündete — mit einer ersten Spur auf Blatt ⑨. In Verbindung mit dem Blatt der Leistenotizen kann Gauß' „Liebes Büchlein“ als Zeugnis für die erste, 10jährige Phase in der Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae* verstanden werden. Zeigt nicht auch dieses Ergebnis, wie praktisch privat erworbene Digitalisierungen von Unikaten aus der Gaußbibliothek für die private Forschung sind.

Ein Ausschnitt aus der Vorderseite von Blatt ⑨ erscheint in der überlangen Fußnote 10 des Berichts über einen Workshop zum Rechnen, der 2007 in Prag stattfand. In dieser geht es unter anderem auch um die Funktion des Eindeutigkeitssatzes einer Primfaktorzerlegung beim Rechnen. Dieser muss ja schon bewiesen sein, damit Gauß' Divisionsmethode angewendet werden kann ([28], p. 34).

Bei der Ausarbeitung einer deutschen Version des Prager Workshops kam von Norbert Schappacher der Hinweis, dass Catherine Goldstein sich in ihrem Aufsatz, *On a Seventeenth Century Version of the "Fundamental Theorem of Arithmetic"* mit dem Thema *Eindeutigkeit* beschäftigt hatte. In diesem heißt es ([22], p. 184):

... Another question concerns the remainder of the story. In the eighteenth century, literal notations were trivialities and the uniqueness of factorization for integers seemed transparent. Authors — for instance Euler and also Legendre (whose first version, *Essai sur la Theorie des Nombres*, appeared in 1798) did not comment on it, not even allusively, but made constant use of it. It was clearly directly against this trend (and not against mere ignorance of the facts) that Gauss fought in his *Disquisitiones*, and the people he quoted were Euler, Lagrange, Legendre, not, of course, Prestet. Gauss rightly noticed that the existence of a decomposition is an evident consequence of "the elements," but its uniqueness had to be proved; Legendre, even in 1830, would do exactly the opposite, that is, justify the decomposition and use the uniqueness without comment, see [Legendre 1830, 5ff.]. It is not clear to me if the need that Gauss expressed for a proof came from more than a particularly lucid care for foundations.

Zum Beweis von Euklids Lemma sagte Gauß schon in der Bemerkung in Artikel 14 ([16], p. 7):

Der Beweis dieses Satzes ist bereits von Euclid, Elem. VII, 32, gegeben worden. Wir haben ihn jedoch nicht weglassen wollen, einmal weil von den Neueren einige entweder nur nichtige Gründe für einen Beweis des Satzes ausgegeben oder ihn ganz und gar übergangen haben, ...

So legt der Hinweis auf die Neueren zunächst einen Blick in Remers *Arithmetica* nahe. In Caput IV — *Von Prim- und zusammengesetzten Zahlen* — wird (ohne Nennung von Euklid) der folgende Satz ausgesprochen, und danach dann auch bewiesen ([40] §. 38, p. 294/295):

Wenn von 2 Zahlen das Product durch eine Prim-Zahl aufgehen kann, so ist zum wenigsten einer der Factorum in solche Prim-Zahl theilbar.

Der dem heutigen Leser vielleicht obskur erscheinende Beweis Remers wird verständlich, wenn er in Verbindung mit der einige Seiten zuvor ausgesprochenen Frage gesehen wird: „*Wie die Prim- und theilbaren Zahlen finden?*“ ([40] §. 24, p. 287ff)

§ 24. Wenn man demnach wissen will, welche Zahlen *Primi*, und welche *compositi* sind, so mache man sich eine *Tabelle*, oder *Tarif* nach folgender Regul.

1) Schreibet die Zahlen, wie sie in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgen, so weit man will.

2) Ziehet von jeglicher Zahl die vorhergehenden, jede insonderheit ab, soviel ihr könnt, und sehet, ob nicht eine, oder: mehr unter den vorhergehenden, die sie ganz ohne Rest aufhebe.

3) Streichet man die Zahl, auf welche man nach der Abzählung kommen, und die nach geschehener Abnahme einiger Zahlen nichts über lassen mit einem Strichlein durch.

4) Die durchgestrichenen Zahlen sind *Numeri compositi*, die offen bleiben, sind *Prim-Zahlen*; und stehet der Tarif bis 300. also:⁴

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.
15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26.
27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38.

Man kann diesen Tarif, oder: Tabelle nach belieben, und wie es die Noth erfordert, *extendiren*; weil sie aber dazu dienet, dass die *Prim-Zahlen* von den zusammengesetzten abgesondert werden, so heisset sie: des *Eratosthenis cribrum*.

Wird anstelle jeder der mit einem Strichlein durchgestrichenen Zahlen die Factorisierung dieser Zahl notiert, dann liegt ein Beweis des Lemmas wie in §. 38 nahe: Begonnen wird mit einem Produkt von zwei Faktoren, wobei einer eine Primzahl ist und der andere ein Produkt von zweien; das „und so weiter“ bleibt dem Leser überlassen.

Bei diesem für die höhere Arithmetik entscheidenden Werkzeug interessiert naturgemäß die Frage, ob in §. 38 Spuren von Gauß' *kindlicher Hand* zu sehen sind, und die gleiche Frage liegt natürlich auch beim Sieb des Erathosthenes in § 24 nahe — sagt doch Igor R. Shafarevitch 2003 zum planmäßigen Abzählen der Primzahlen [48] p. 132):

Many mathematician were fascinated by the secret of the distribution of prime numbers and tried to discover it based on tables. In particular Gauss was interested in this question almost in childhood. His interest in mathematics evidently began with a childhood interest in numbers and constructing tables. In general, great mathematicians were virtuosos of calculation and were able to perform enormous calculations, sometimes mentally. (Euler even struggled with insomnia in that way !) When Gauss was 14 years old, he constructed a table of prime numbers ...

In Lamberts *Zusätzen* gibt es auf den Seiten 18–27 eine Beschreibung der ‘*Tafel der Primzahlen von 1 biß 102000*’, zu der es auf Seite 19 heißt, »*Man weiß zwar noch nicht eigentlich, was mit einer solchen Liste von Primzahlen anzustellen ist.*« In einem Brief an Encke ([18], Werke Band II, p. 444–447) sagt Gauß, was er mit der Liste anstellte, und in seinem eigenen Nachtrag zur Tafel V in Lamberts *Zusätzen*, wird die *Anzahl der Primzahlen in jedem 1000* aufgelistet.⁵

In der von Maarten Bullynck im Nachlass entdeckten ‘*Beschreibung*’ Carl Friedrich Hindenburgs wird Euklids Lemma übergangen. Stattdessen gibt es in Hindenburgs grundsätzlichen Überlegungen zur *Anwendung der Methode auf die theilbaren und untheilbaren Zahlen in Beziehung auf eine dadurch zu fertigende Factorentafel* einen Kommentar, der einen entscheidenden Punkt in der Entwicklung der höheren Arithmetik markiert ([24] p. 14/15):

⁴ Nur drei Zeilen werden gezeigt, die 1 blieb überraschend offen, die Primzahl 2 wurde durchgestrichen.

⁵ Den Hinweis, dass ein Scan von Lamberts *Zusätzen* über das Göttinger Digitalisierungszentrum erworben werden kann, verdanke ich Maarten Bullynck.

... Unter den kleinsten Faktoren der ersten Million ist die Primzahl 997 die letzte. Alle diese Faktoren (denn die Zahlen 1, 2, 3, 5 können hier, da sie nicht weiter in Betrachtung kommen, nicht mitgerechnet werden) bleiben auch in der zweiten Million, in welcher sie (da man für sie den Vorteil ihrer Quadrate nicht, wie bey der ersten Million, nutzen kann) auch öfterer vorkommen, und über dieses noch in Gesellschaft von 55 neuen Factoren, bis mit der Primzahl 1409 auftreten. bey denen aber der Quadrate wieder benutzt werden kann. Auf ähnliche Weise wächst die Arbeit in ihrem Fortgange beständig, so, daß folgende Millionen, oder auch andere Theile des Ganzen, allemal ungleich beschwerlicher zu berechnen sind, als vorhergehende; und man übersieht zugleich mit der lebhaftesten Überzeugung, daß diese Schwürigkeit so wesentlich in der Natur dieser Zahlen verwebt ist, daß für sie keine weitere Erleichterung von irgendeiner Methode zu erwarten ist; denn auch selbst wenn sie jemand erfände, zu jeder gegebenen Zahl, den kleinsten Factor auf der Stelle hinzuschreiben, würde doch nur die Schwürigkeit verhältnismäßig vermindern, aber nicht heben, da in späteren Millionen, der untheilbaren Zahlen immer weniger, der theilbaren Zahlen aber immer mehr werden.

Und dennoch fehlt vielleicht diesem letztern, sehr scheinbaren Gedanken, zu seiner vollständigen Richtigkeit nichts weiter als — als die Wahrheit. Für viele, gewiß sehr viele Millionen vom Anfange herein, ist er unzweifelhaft gewiß; ob aber auch für sehr späte, für alle, und beständig? dawider scheint selbst eine nicht schwer anzustellende Induction zu streiten. Ich habe weder Zeit noch Lust, einen für meine Absicht völlig unbrauchbaren Satz, der mehr eine unzeitige Neugierde zu befriedigen, als einen reellen Nutzen zu befördern scheint, durch einen weitläufigen strengen Beweis *a priori* zu unterstützen oder zu verwerfen; und ich bin gewiß, daß ich, so lange die Welt stehen wird, durch keine, auch auf noch so viele Millionen ausgedehnte Tafel, eben so wenig *a posteriori*, aus den Millionen, widerlegt werden kann.

Hindenburgs Ausführungen zur *unzeitigen Neugierde* in Bezug auf einen *völlig unbrauchbaren Satz* erweckten Neugier auf eine Reaktion von Gauß. Maarten Bullynck schickte per Email eine Kopie dieser Seite; dort sind die unterstrichenen Worte Zeit und Lust zu sehen, und auf dem Rand daneben eine schlecht lesbare handschriftliche Notiz.

Die Frage an die Gauß-Bibliothek, was denn in der Randnotiz notiert wurde, beantwortete Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* in einer Email vom 18. August 2010: die Eintragung lautet: "Hr. H. möchte wol so wenig zu dem einen als dem andern fähig gewesen sein."

Weil Euklids Lemma in Hindenburgs *Beschreibung* nicht einmal erwähnt wird, macht Gauß hier wohl auf zwei arithmetische Sachverhalte aufmerksam, die Remer und Hindenburg anscheinend für selbstverständlich hielten:

1. Remers Vorstellung, dass des *Eratosthenis cribrum* nach belieben *extendiert* werden kann, ist zunächst einmal ja nur ein frommer Wunsch, und auch Hindenburgs Erklärung, »*ich bin gewiß, daß ich, so lange die Welt stehen wird, durch keine, auch auf noch so viele Millionen ausgedehnte Tafel, eben so wenig a posteriori, aus den Millionen, widerlegt werden kann,*« zeigt nur, dass es hier eine offene Frage gibt.
2. Des *Eratosthenis cribrum* liefert für jede gegebene Zahl eine Faktorisierung, und die Frage, ob es für die jeweils betrachtete Zahl nicht vielleicht noch weitere Faktorisierungen zulässt, erscheint im diesen Kontext als geradezu unsinnig.

Aus den schon genannten Gründen hat Gauß die Arithmetik so komplettiert, dass in ihr auch die schon in der Vergangenheit entstandenen Tafeln ihren natürlichen Platz finden.

Und zum ersten Thema gibt es eine Spur von Gauß auf dem linken Rand einer Seite von Liber IX seines in der Gauß-Bibliothek aufbewahrten Exemplars von Euklids *Elementen*. Dort erscheint nämlich ein ¶, das Prop. XX markiert: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgegebene Menge von Primzahlen A, B, C* ([14], p. 220). Wie Gauß in seiner Vorrede zu den *Disquisitiones Arithmeticae* andeutet, gehört dieser Satz zu den ersten Anfängen dieser Wissenschaft ([16], p. V), und so gab es — anders als bei Euklids Lemma — wohl keinen Grund, den 2000 Jahre alten Satz (und seinen Beweis) auch nur zu erwähnen.

Zeigen nicht dies Alles Gauß' *particularly lucid care for foundations*? Und stellt sich nicht gerade deshalb »*the beginning of all beginnings*« ganz anders dar, als es noch 2007 Goldstein und Schappacher im Kapitel *A Book in Search of a Discipline* von 'The shaping of arithmetic' glaubten ([23], p. 5)?

12 Epilog

Die Nachricht von der zärtlichen Anrede „Liebes Büchlein“ auf der Innenseite des Buchdeckels erweckte auf Anhieb den Wunsch, das Rechenbuch des genialen Kindes in die Hand zu bekommen. Die ungewöhnliche Rechenaufgabe auf der Seite 64 fiel schon beim ersten Blättern auf. Die Entdeckung der außerordentlichen Wahrheit auf den Seiten 303/304 und das dann allmählich zutage tretende Band zwischen dem „Lieben Büchlein“ und der *Höheren Arithmetik* in den *Disquisitiones Arithmeticae* verblüfften, wobei der Zufallsfund in den Leistenotizen mit Eulers Motto von den *verités generales* als treibender Kraft bei der Entdeckung der *Höheren Arithmetik* ein wichtige Rolle spielte. Die charakteristischen Eigenschaften dieses von Gauß geschaffen Bereichs der Mathematik beschreibt der dann 70jährige in seinem Vorwort zu Gotthold Eisensteins *Mathematischen Abhandlungen* ([13] p. III):

Die Höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhange stehen, und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet.

13 Rudimente einer älteren, untergegangenen Methode

Seit 2005 gibt es mit der 1739 erschienenen *Demonstrativischen Rechenkunst* [41] eine über das Internet verfügbare zweite Auflage von Remers *Arithmetica*. Diese erlaubt es einerseits, die Angaben in dem vorliegenden Aufsatz nachzuvollziehen, ohne eine der wenigen Bibliotheken Deutschlands aufzusuchen, in denen Rara wie Remers *Arithmetica* nur im Sonderlesesaal zur Einsicht an Ort und Stelle vorgelegt werden. Das Rechenbuch könnte aber auch animieren, nach Beispielen zum Rechnen zu suchen, die Gauß zur Anrede *Liebes Büchlein* bewegt haben könnten. Zur Einstimmung auf dieses Thema folgen drei Beispiele.

Addieren Auf der Basis der neuen Quelle wurde 2007 in Prag ein Workshop über das Rechnen veranstaltet [28] mit dem singulären Beispiel 33 in Caput II der *Exempla zur Addition* als Ausgangspunkt. Hier sind die Zahlen 12, 13, 14, . . . , 34, 35, 36 sowie 47 und 64 zu addieren. Wie bei allen Beispielen in dem Rechenbuch wird zusammen mit der Aufgabenstellung auch gleich die Lösung 711 angegeben ([40] p. 64). Werden die beiden letzten Zahlen 47 und 64 weggelassen, dann bleiben aufeinanderfolgende Zahlen übrig, und diese zusammenzuzählen liefert eine etwas kniffligere Herausforderung für den erleuchteten Rechner, als das Beispiel $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, das üblicherweise mit Gauß assoziiert wird.

Numerieren Caput I enthält einen »Sonderbaren Brauch der 9 Einer« ([40] p. 48):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | r | a | u | n | s | c | w | e | i | g |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | |
| 0 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |

Offensichtlich hat jede der beiden Zeilen die gleiche Summe. Das Doppelte dieser Summe ergibt sich, wenn sämtliche in dem *Sonderbaren Brauch* erscheinenden Zahlen zusammengezählt werden: $1 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 1 = 2 + 8 \cdot 11 = 2 + 88 = 90$. Die Summe selbst ist daher die Hälfte von 90, und das ist nichts anderes als 45.

Der in Braunschweig lebende Autor und Übersetzer Hubert Mania hat den *Sonderbaren Brauch der 9 Einer* entdeckt und damit die versteckte arithmetische Wahrheit offen gelegt, die Büttners legendärer Rechenstunde zugrunde liegt ([42], p. 12/13). Mit diesem sensationellen Fundstück aus Gauß' Kinderbuch kann Mania gleich zum Beginn seiner mitreißenden Gauß-Biographie ein erstes Glanzlicht setzen ([34], p 7–38).

Subtrahieren In Caput III, *Von Subtrahiren in unbenahmten gantzen Zahlen*, gibt es die Anregung: »Einige haben auch Lust dazu gehabt, von der lincken zur rechten die Subtraction

zu verrichten« ([40] p. 78). Mehr als 40 Jahre nach dem Erscheinen der *Disquisitiones Arithmeticae* hat Gauß am 3. Oktober 1844 in einem Brief an den Astronomen Heinrich Christian Schumacher beschrieben, wie die Buchführung — ohne Nebenrechnung wie bei Remer — effektiv erledigt werden kann ([21] p. 38):

... für mich ist immer das Subtrahiren etwas bequemer, als das Addiren (beim Rechnen, auch mitunter in andern Dingen). Obgleich der Unterschied sehr gering ist, so steht er doch als Factum bei mir seit 50 Jahren fest: aber erst heute, da Sie sagen, dass es bei Ihnen umgekehrt sei, habe ich darüber nachgedacht, was wohl bei mir der Grund davon sein möge: Ich glaube es ist folgender. Ich bin gewohnt, wenn zwei übereinanderstehende Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, immer die Summe oder die Differenz sogleich von der Linken zur Rechten niederzuschreiben. Allen meinen Schülern, die sich Rechnungsfertigkeit erwerben wollten, habe ich immer gleich Anfangs empfohlen, sich daran zu gewöhnen (was in *sehr* kurzer Zeit geschieht) und alle ohne Ausnahme haben es mir nachher sehr Dank gewusst. Der Vortheil davon besteht darin, dass jeder, der kein Jude ist, viel geläufiger und calligraphischer von der Linken nach der Rechten schreibt als umgekehrt, und auf ein zierliches Ziffernschreiben, und dass sie immer recht ordentlich unter einander und neben einander stehen, kommt ja sehr viel an.

Cela posé, beantwortet sich obige Frage nun so: Während man Summe oder Differenz von der Linken zur Rechten schreibt, muss man immer zugleich die folgenden Ziffern berücksichtigen, die beim Addiren nötig machen können, eine um 1 grössere, beim Subtrahiren eine um 1 kleinere Zahl zu schreiben. Diese Berücksichtigung wird nun zwar bald so mechanisch, dass man gar nicht daran denkt, immer aber bleibt sie beim Subtrahiren ein klein wenig einfacher als beim Addiren: z.B. wird Addirt

387...
218... so kann die Summe sein 605 oder 606,

wird subtrahirt, so, kann die Differenz sein 169 oder 168; allein die Entscheidung hängt beim Subtrahiren nur von Gleichheit oder Ungleichheit der übereinanderstehenden folgenden Ziffern ab, beim Addiren aber, ob die Summe der übereinanderstehenden die 9 überschreitet, und das erstere ist einfacher, als das andere. Mit Worten ausgedrückt, würde die Ratio decidendi sein:

Beim Subtrahiren: wenn (von der betreffenden Stelle nach der rechten fortschreitend, und die übereinanderstehenden Ziffern immer als ein Paar bildend, betrachtet) — das *erste ungleiche* Paar die

größere Ziffer

| | | | |
|-------|------------|-------|-----------------------------------|
| oben | hat, tritt | keine | Verminderung um eine Einheit ein. |
| unten | | eine | |

Beim Addiren: wenn [für] das erste Paar, welches eine von 9 verschiedene Summe gibt, diese Summe

| | | | |
|---------|------------------|-------|--------------------------------------|
| größer | ist als 9, tritt | eine | Vergrößerung um eine Einheit ein ... |
| kleiner | | keine | |

Dividieren Wie zehn Stellen der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{2}{31831}$ bestimmt werden können, muss im Zeitalter des Taschenrechners nicht erklärt werden. Mehr als zehn Stellen erhält man nicht auf Knopfdruck, doch macht dies die Anwendung der höheren Arithmetik auf die elementare möglich. Ein typisches Beispiel — unter Verwendung der Gleichung $\frac{2}{31831} = \frac{34}{139} - \frac{56}{229}$ — findet sich in den *Leistenotizen* ([30] bei Seite 79).

Philipp Maennchen hat im Abschnitt *Das Gauss'sche Divisions-Verfahren* seines Aufsatzes über *Gauss als Zahlenrechner* auf diese Gleichung hin ([32] p. 9/10) hingewiesen. Der Hinweis auf dieses interessante Fundstück von Philipp Maennchen wird in der Inventarliste der Gauß-Bibliothek unterschlagen. Hier heißt es nur, S. 79 *numerische Gleichungen* (zu *Leiste?*). Unter Verwendung der schon genannten *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche* kann die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{2}{31831}$ ohne Division auf beliebig viele Stellen bestimmt werden.

In Artikel 316 des Sechsten Abschnitts der *Disquisitiones Arithmeticae* gibt es eine ausführliche Gebrauchsanweisung, die deutlich zeigt, wie eng hier Theorie und Praxis miteinander verwoben sind:

Nach diesen Prinzipien haben wir für alle Nenner von der Form p^u unterhalb 1000 eine Tafel der notwendigen Perioden aufgestellt, die wir ganz oder auch in noch weiterer Fortsetzung bei geeigneter Gelegenheit veröffentlichen werden. Hier möge die bis zu 100 nur fortgeführte Tafel III als

Probe genügen, und wird eine Erklärung derselben kaum nötig sein. Für diejenigen Nenner, für welche 10 primitive Wurzel ist, stellt sie die Perioden der Brüche mit dem Zähler 1 dar (nämlich für 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97), für die übrigen die f den Zählern $1, r, r^2, \dots, r^{f-1}$ entsprechenden Perioden, welche durch die beigeschriebenen Zahlen (0), (1), (2), ... unterschieden sind; für die Basis r ist immer dieselbe primitive Wurzel genommen wie in Tafel I. Hiernach kann also die Periode eines jeden Bruches, dessen Nenner in dieser Tafel enthalten ist, mittelst der Vorschriften des vorigen Artikels abgeleitet werden, nachdem der Index des Zählers nach der Tafel I berechnet ist. Übrigens lässt sich für so kleine Nenner die Aufgabe ebenso leicht ohne die Tafel I erledigen, wenn man durch gewöhnliche Division soviel Anfangsziffern der gesuchten Mantisse berechnet, als nach Artikel 313 erforderlich sind, um sie von allen andern denselben Nennern unterscheiden zu können (für die Tafel III nicht mehr als 2), und sämtliche demselben Nenner entsprechende Perioden durchmustert, bis man zu jenen Anfangsziffern gelangt, welche den Anfang der Periode unzweifelhaft anzeigen; es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass jene Ziffern auch getrennt sein können, so dass die erste (oder mehrere) das Ende irgend einer Periode die andere (oder die anderen) den Anfang derselben Periode bilden.

Beispiel. Man sucht die Periode des Bruches $\frac{12}{19}$. Hier hat man für den Modul 19 nach Tafel I ind.12 = 2ind.2 + ind.3 = 39 \equiv 3 (mod 18) (Artikel 57). Somit muss man, da man für diesen Fall nur eine dem Zähler 1 entsprechende Periode hat, die drei ersten Ziffern derselben an das Ende setzen, woraus man die gesuchte Periode 631578947368421052 erhält. — Ebenso leicht hätte man den Anfang der Periode aus den beiden ersten Ziffern 63 gefunden.

Wenn man die Periode des Bruches $\frac{45}{53}$ haben will, so ist, für den Modul 53, ind.45 + 2ind.3 + ind.5 = 49; die Anzahl der Perioden ist hier $4 = f$ und $49 = 12f + 1$; daher sind in der mit (1) bezeichneten Periode die 12 ersten Ziffern hinter die übrigen zu setzen, und die gesuchte Periode ist 8490566037735. Die Anfangsziffern 84 sind in diesem Falle in der Tafel von einander getrennt.

Gauß' Verfahren zur Subtraktion liefert das notwendige Hilfsmittel für seine im sechsten Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* ausführlich vorgestellte Methode für die Division, mit der eine Tafel wie die von Schulze gewünschte erstellt werden kann ([16] p. 364–373).

Übungsaufgabe zum Subtrahieren: Man bestimme mit der Methode von Gauß 20 Stellen des Dezimalbruchs von $\frac{2}{31831}$.

Mit seinem Divisionsverfahren hat Gauß zu der anscheinend abgeschlossene Geschichte der vier Rechenoperation ein neues Kapitel hinzugefügt. Diese erste arithmetische Großtat und ihre Auswirkungen wurde allerdings nie wirklich gewürdigt. Zuallererst hat das wohl mit Paul Bachmanns Werke–Beitrag *Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten* zu tun, in dem es nach einer zehnzeiligen Zusammenfassung des sechsten Abschnitts der *Disquisitiones Arithmeticae* mit 'Verschiedene[n] Anwendungen der vorhergehenden Untersuchungen' heisst: »... was alles mehr praktisches als theoretisches Interesse erweckt« ([1] p. 32).

Ersichtlich blendet dieser Kommentar gerade denjenigen Teil der Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae* aus, in dem Theorie und Praxis Hand in Hand gingen. Trifft nicht die Auffassung von Hermann von Helmholtz zu, der zum Verhältnis zwischen Theorie und Praxis einmal sagte: »Es gibt nichts praktischeres, als eine gute Theorie.«

In einem Katalogbeitrag zur Ausstellung, *Maß, Zahl und Gewicht — Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung*, hat Karin Reich sich schon 1989 mit Remers *Arithmetica* auseinandergesetzt. Einer kommentierten Inhaltsangabe des Rechenbuches folgt die Zusammenfassung ([35], p. 224): »Zunächst wird auf die Rechenoperationen eingegangen, nämlich Numerieren, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Dann werden gerade, ungerade und Primzahlen unterschieden. Diese verschiedenen Arten von Zahlen machen einen Vergleich möglich, Remer schildert die verschiedenen Arten von Proportionen. In analoger Weise wird anschließend ebenso ausführlich die "Arithmetica vulgaris numerosa in gantzen und benahmten Zahlen" behandelt. Der letzte Abschnitt ist der Bruchrechnung gewidmet, auch hier unterscheidet Remer zwischen "unbenahmten" und "benahmten" Brüchen.« Dieser pauschalen und kaum erhellenden Inhaltsübersicht der *Arithmetica theoretico practica* schließt sich überraschend eine Beurteilung des Rechenbuches von Carl Friedrich Gauß an:

Remers Rechenbuch mutet, entgegen den Ausführungen im Vorbericht, sehr theoretisierend und abstrahierend an. Es ist mit 684 Seiten Umfang und einem Register auch für ein Lehrbuch, das mit Lehrbüchern von anderen Rechenmeistern konkurriert, ungewöhnlich ausführlich und eigentlich ohne direkt erkennbaren Praxisbezug.

Kopien von Originalmanuskripten

1. Eine Kopie der letzten Seite der Leistenotizen:

Journal

Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes infigere aliquo commodum afficiunt quorum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo infigri commo sunt coniunctae tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyticos promovendos viresque ingenii acutandas occasionem praebant. Quum enim plerimas speculationes, et unde maxima utilitas expectari possit, ob solum analyticos defectum despicere cogimus, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur quae haud contenta da analyticos incrementa pollicentur.

Euler. Comm. Nov. Petrop. VI. p. 58

Il ya des verités generales que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers.

Euler. Histoire de l'Ac. de Berlin

1748. p. 204.

Au sujet du theoreme de Fermat : $a^m \equiv a$.

on pourra comparer encore

l'appel au public par König et

la réponse de Euler Hist. de l'Ac. de Pr. A. 1750. p. 530

Uyamps - 13.45

2. Vier Kopien aus Math 17 Dezimalbruchtafeln:

Math 17
Periodarum quas servant fractionum communes per decimales expressio tabula

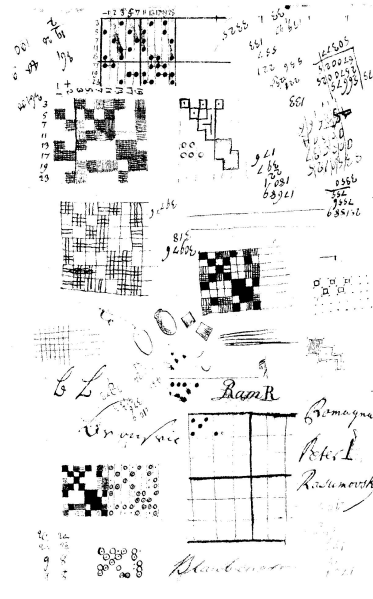
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 3 | 033 | 066 | 123 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 | 540 | 600 | 660 | 720 | 780 | 840 | 900 | 960 | 1020 | 1080 | 1140 | 1200 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 025 | 050 | 075 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 | 250 | 275 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 | 425 | 450 | 475 | 500 | 525 | 550 | 575 | 600 | 625 | 650 | 675 | 700 | 725 | 750 | 775 | 800 | 825 | 850 | 875 | 900 | 925 | 950 | 975 | 1000 |

Math 17
Fractionum communium per fractiones decimales
expressarum periodi

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 3 | 033 | 066 | 123 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 | 540 | 600 | 660 | 720 | 780 | 840 | 900 | 960 | 1020 | 1080 | 1140 | 1200 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 025 | 050 | 075 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 | 250 | 275 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 | 425 | 450 | 475 | 500 | 525 | 550 | 575 | 600 | 625 | 650 | 675 | 700 | 725 | 750 | 775 | 800 | 825 | 850 | 875 | 900 | 925 | 950 | 975 | 1000 |

Math 17
Anwendung gewisser Brüche in Dezimalbrüche

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 3 | 033 | 066 | 123 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 | 540 | 600 | 660 | 720 | 780 | 840 | 900 | 960 | 1020 | 1080 | 1140 | 1200 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 025 | 050 | 075 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 | 250 | 275 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 | 425 | 450 | 475 | 500 | 525 | 550 | 575 | 600 | 625 | 650 | 675 | 700 | 725 | 750 | 775 | 800 | 825 | 850 | 875 | 900 | 925 | 950 | 975 | 1000 |



Danksagung Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der SUB–Göttingen danke ich für die immer freundliche und stets hilfreiche Beantwortung meiner zahlreichen Fragen und insbesondere auch für die Beschaffung des für diese Arbeit nötigen Materials aus dem Nachlass von Gauß.

Bei Maarten Bullynck bedanke ich mich für den freundschaftlichen Gedankenaustausch seit 2007, beginnend mit Gauß und den periodischen Dezimalbrüchen. Eine Anfang 2009 begonnene, gemeinsame Arbeit zum Rechenbuch von Gauß wurde schnell zu einem Einmann–Projekt, und so schlug Maarten im September 2009 vor, auf den Entwurf–Seiten für den im Entstehen begriffenen Aufsatz seinen Namen als Co–Autor wegzulassen.

Leonhard Siebeneicher verdanke ich die schwarz–weiß Bearbeitung des vom *Göttinger Digitalisierungs Zentrums* angefertigten Scans der letzten Seite der Notizen.

Internetquellen und weitere Informationen

Die *Arithmetica theoretico–practica* von Christian Stephan Remer:

<http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Remer.djvu>

Der Scan des Rechenbuches gehört, wie eine Reihe anderer in der Arbeit erwähnter Quellen, seit 2005 zu meiner digitalen Bibliothek zum Rechnen:

<http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Rechnen.html>

Diese Arbeit entstand bei der Ausarbeitung der Fußnote 10 des Workshops zum Rechnen:

<http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/workshop.pdf>

Ein Vorläufer zu dem Prager Workshop war ein Vortrag zum Wintermeeting der Canadian Mathematical Society im Dezember 2000 in Vancouver: Auf der Basis von Leonhard Eulers *Einleitung zur Rechenkunst* [15] entstand damals *Euler's Art of Reckoning*:

<http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Vortrag.pdf>

Göttinger Bibliotheksschriften 30: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gbs/gbs_30.pdf

Literatur

1. Bachmann, P.: Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten. In: Gauß, Carl Friedrich: Werke, Band X_2 , Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933
2. Biegler G., Reich K.: Carl Friedrich Gauß : Genie aus Braunschweig — Professor in Göttingen. J. H. Meyer, Braunschweig, 2005.
3. Bühler, W. K.: Gauss: A Biographical Study, Berlin, Springer, 1981.
4. Bullynck M.: Vom Zeitalter der Formalen Wissenschaften. Anleitung zur Verarbeitung von Erkenntnissen anno 1800, vermittelt einer parallelen Geschichte. Thesis, Universiteit Ghent. Ghent, Belgium, 2006. Defended 22.3.2006, available at www.kuttaka.org/ZfW.pdf.
5. Bullynck, M., A note on article 36 in Gauss's Disquisitiones. A ramificated story in the margin of the re–writing of section II. Bull. of the Belg. Math. Society — Simon Stevin 13 (5), 945–947, 2007.
6. Bullynck M.: Aspects of 18th Century Mathematical Socialisation: The Case of C.F. Gauss, Materials on the Genesis of the Disquisitiones Arithmeticae, Part I, preprint, <http://www.sarton.ugent.be/publications/preprints>.
7. Bullynck M.: A History of Factor Tables with Notes on the Birth of Number Theory 1657–1817. Verfügbar über: www.kuttaka.org/FactorTables.pdf.
8. Bullynck M.: Decimal periods and their tables: A German research topic (1765–1801), *Historia Mathematica*, Volume 36, p. 151–154, 2009
9. Bullynck M.: Modular Arithmetic before C.F. Gauss, Systematizations and discussions on remainder problems in 18th-century Germany. In: *Historia Mathematica*, 38, p. 48–72, 2009.
10. Conway, J. H. C, Guy, R.: *The Book of Numbers*, Copernicus, New York, NY, 1996.
11. Dirichlet, P. G.: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. Dedekind, F. Vieweg et fils, Braunschweig, 1863.
12. Dunnington, G. Waldo: *Carl Friedrich Gauss, Titan of Science*. Reprint, The Mathematical Association of America, 2004.
13. Eisenstein, G.: *Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der elliptischen Functionen; mit einer Vorrede von Gauss*. Berlin, Reimer, 1847.
14. Euklid: *Elementorum Evclidis libri XV ad Graeci contextus fidem recensiti et ad vsvm tironvm accomodati*, Leipzig, 1768. Gauß' Exemplar, Signatur: Gauss-Bibl 189.
15. Euler, L.: *Einleitung zur Rechen–Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg*, 2 Bände, 1738/1740.
16. Gauß, C. F.: *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, deutsch von H. Maser, Berlin, 1889.

17. Gauß, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae*, Einleitung von N. Schappacher. Olms, Hildesheim Zürich, New York, 2006.
18. Gauß, C. F.: *Werke*, Band II, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1863.
19. Gauß, C. F.: *Werke*, Band X_2 , Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
20. Gauß, C. F., Zimmermann, E. A. W.: *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Eberhard August Wilhelm von Zimmermann*. Hrsg. Poser, H., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1987.
21. GAUSS an SCHUMACHER (1844), *Addieren und Subtrahieren von links nach rechts*, Praxis des numerischen Rechnens, Werke XII, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1929.
22. GOLDSTEIN, C. (1992), *On a Seventeenth Century Version of the "Fundamental Theorem of Arithmetic"*, *Historia Mathematica* 19.
23. Goldstein, C. et al. (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
24. Hindenburg, C. F.: *Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehenden Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden, nebst Anwendung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders auf eine darna erwähnt wirdch zu fertigende Factorentafel, mit eingestreuten, die Zahlenberechnung überhaupt betreffenden Anmerkungen*, Leipzig, 1776.
25. Klein F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Reprint, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.
26. Klein F.: *Abdruck des Tagebuchs (Notizenjournals) mit Erläuterungen*. In: Gauß, Carl Friedrich: *Werke*, Band X_1 , Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1917.
27. Küssner, M.: *Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher*. Musterschmidt, Göttingen, 1979.
28. Kuřina, F., Siebeneicher, C.: *Algebra and Geometry in Elementary and Secondary School*. In Barbin, E. et al. (eds.): *History and Epistem. in Math. Ed., Proc. 5th Europ. Summer Univ.*, p. 30–38, Prague 2007.
29. Lambert, J. H.: *Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrische Tabellen*, Haude und Spener, Berlin, 1770.
30. Leiste, C.: *Die Arithmetik und Algebra zum Gebrauch bey dem Unterrichte*. Exemplar der Gauss-Bibliothek aus dem Nachlass von Gauß, Signatur Cod. Ms. Handbuch 1. Wolfenbüttel, 1790.
31. Maennchen P.: *Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss*. In: *Nachr. d. K. Ges.*, Heft VII., Leipzig, 1918.
32. Maennchen, P.: *Gauss als Zahlenrechner*. In: Gauß, Carl Friedrich: *Werke*, Band X_2 , Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
33. Maennchen, P.: *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Diesterweg, Frankfurt a.M. 1928.
34. Mania H.: *Gauß — eine Biographie*, Rowohlt, Reinbeck, 2008.
35. Reich K.: *Lehrbücher, Elementarmathematik*. In: Folkerts M. et al. *Maß, Zahl und Gewicht: Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung*. Acta Humanoria, Weinheim, 1989.
36. Reich, K.: *Carl Friedrich Gauss: 1777/1855*, München, 1977.
37. Reich K.: *Der junge Gauss und seine Welt der Mathematikbücher*. In: Mittler E. (Hrsg.): „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst“, *Carl Friedrich Gauß in Göttingen*. Göttinger Bibliotheksschriften 30, 2005.
38. Reich, K.: *Gauß' geistige Väter: nicht nur „summus Newton“, sondern auch „summus Euler“*. In: Mittler E. (Hrsg.): „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst“. Bibliotheksschriften 30, 2005.
39. Reich K.: *Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkrantz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten*. In: *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Neue Folge*, 10. Band, 2011.
40. Remer, C. S.: *Arithmetica theoretico-practica: das ist: Anweisung zu der Arithmetique, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen . . .*, Schröder, Braunschweig, 1737.
41. Remer, C. S. *Demonstrativische Anweisung zur Rechen-Kunst, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen . . .*, Zweyte Auflage, Schröder, Braunschweig, 1739.
42. Sartorius von Waltershausen, W.: *Gauss zum Gedächtniss*, Hirzel, Leipzig, 1856.
43. Rohlfing, H. *Das Erbe des Genies: Der Nachlass Carl Friedrich Gauß an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen*. In: *Gauss-Gesellschaft e.V., Mitteilungen Nr. 40*, Göttingen, 2003.
44. SCHERING, E. (1863), *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche*, Gauss' Werke, Band II, Göttingen.
45. Schlesinger, L. *Der junge Gauß*. In: *Nachrichten der Gießener Hochschulgesellschaft*, Band 5, Heft 3, Gießen, 1927.
46. Schlesinger, L. *Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Gauß, Carl Friedrich: *Werke*, Band X_2 , Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
47. Schulze, J. C.: *Neue und Erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln*, August Mylius, Berlin, 1778.
48. Shafarevitch, I. R.: *Discourses on Algebra*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
49. Shanks, D.: *Solved and unsolved Problems in Number Theory*, 2. ed. Chelsea, New York, NY, 1978.
50. Weil, A.: *Zahlentheorie — ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992,