CHAOSTHEORIE - DER SATZ VON SMALE FÜR NICHTINVERTIERBARE DYNAMISCHE SYSTEME (Andre Schenke)

Ein dynamisches System beschreibt ganz allgemein die Entwicklung einer Größe mit der Zeit. Dabei gibt es zwei grundsätzliche Möglichkeiten, die Zeit zu modellieren: kontinuierlich oder diskret. Der erste Fall führt auf Differentialgleichungen, der zweite Fall auf Differenzengleichungen. Der Vortrag befasst sich mit letzteren.

Eine sehr hilfreiche Voraussetzung hierbei ist, anzunehmen, dass die Dynamik durch einen Diffeomorphismus, also eine invertierbare Abbildung gegeben wird. Jedoch lassen sich nicht alle Anwendungen durch invertierbare Abbildungen modellieren, so dass es notwendig ist, auch nichtinvertierbare Systeme zu untersuchen. Insbesondere für unendlichdimensionale Systeme ist die Invertierbarkeit oft eine zu starke Voraussetzung. Wir untersuchen dynamische Systeme, die von einer C^1-Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ erzeugt werden,

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in J.$$

Indem man die Linearisierung von f betrachtet, erhält man hier eine Differenzengleichung, die Variationsgleichung, auf welche man die Theorie exponentieller Dichotomien anwenden kann.

Der Satz von Smale ist eines der wichtigsten Resultate der Chaostheorie. Er sagt aus, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Dynamik des betrachteten Systems in der nähe eines homoklinen Orbits äquivalent ist zur so genannten symbolischen Dynamik, welche, wie man zeigen kann, chaotisch ist. Damit liefert der Satz von Smale eine hinreichende Bedingung für chaotisches Verhalten.

Das Hauptresultat des Vortrages ist die Verallgemeinerung eines eleganten Beweises von Palmer/Beyn des Satzes von Smale auf den nichtinvertierbaren Fall. Um den Vortrag zu verstehen sollten die Grundvorlesungen ausreichen. Rudimentäre Kenntnisse in Funktionalanalysis und Topologie sind hilfreich.