Integration Banachraum-wertiger Funktionen: Das Bochner-Integral

Ingo Roßdeutscher

8. Dezember 2014

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$. Dieser Vortrag wird eine Einführung in die Integration Banachraum-wertiger Funktionen der Form

$$f : \Omega \to E$$

als Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals bieten. Dies ist als Bochner-Integral bekannt:

$$\int_\Omega f \, d\mu \in E.$$

Bevor wir das Integral definieren können, werden wir zunächst den Begriff der Messbarkeit behandeln. Dazu werden mit der *schwachen Messbarkeit* und der *Bochner-Messbarkeit* zwei unterschiedliche Messbarkeitsbegriffe eingeführt, die unter bestimmten Umständen äquivalent sind (z.B. wenn E separabel ist). Anschließend wird das *Bochner-Integral* vorgestellt und wir werden sehen, dass viele Eigenschaften des Lebesgue-Integrals analog für das Bochner-Integral gelten. Insbesondere lassen sich die Lebesgue-Räume verallgemeinern:

$$\mathcal{L}^p_B(\Omega, \mu, E) := \left\{ f : \Omega \to E : f \text{ Bochner-messbar und } \int_\Omega ||f||^p_E \, d\mu < \infty \right\} \text{ für } 1 \leq p < \infty; \quad p = \infty \text{ analog}$$

und entsprechend L^p_B. Interessant ist auch der Fall

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda}^n) \text{ und } (E, \|\cdot\|_E) = (L^p(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{L^p}),$$

denn man kann zeigen, dass:

$$L^p_B(\mathbb{R}^n, \tilde{\lambda}^n, L^p(\mathbb{R}^m)) \cong L^p(\mathbb{R}^{n+m}). \tag{1}$$

Schlussendlich wird es dann noch Beispiele wie auch Anwendungen geben.

Für das Verständnis sind Kenntnisse in der Maß- und Integrationstheorie wichtig. Darüber hinaus ist Funktionalanalysis hilfreich aber nicht unbedingt notwendig.