Präsenzübung 1

Aufgabe 1. Sei S_3 die symmetrische Gruppe vom Grad 3. Betrachten Sie die Untergruppen

1. $H_1 = \langle (12) \rangle$, die von der Transposition (12) erzeugt ist und
2. $H_2 = \langle (123) \rangle$, die von dem Dreierzykel (123) erzeugt ist.

Bestimmen Sie jeweils die Links-und Rechtsnebenklassen von H_1 und H_2.
Überzeugen Sie sich davon, dass H_2 ein Normalteiler von S_3 ist, H_1 jedoch nicht.

Zunächst bemerken wir, dass $S_3 = \{(12), (23), (13), (123), (132), \mathrm{id}\}$ gilt.

1. Es gilt $H_1 = \{\mathrm{id}, (12)\}$ und somit gibt es genau $|S_3 : H_1| = \frac{6}{2} = 3$ disjunkte Linksnebenklassen (bzw. Rechtsnebenklassen). Die Linksnebenklassen lauten

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\ H_1 = H_1 &= \{\mathrm{id}, (12)\}, \\ (13)\ H_1 &= \{(13), (123)\} \text{ und} \\ (23)\ H_1 &= \{(23), (132)\}. \end{aligned}$$

   Die Rechtsnebenklassen lauten

$$\begin{aligned} H_1\ \mathrm{id} = H_1 &= \{\mathrm{id}, (12)\}, \\ H_1\ (13) &= \{(13), (132)\} \text{ und} \\ H_1\ (23) &= \{(23), (123)\}. \end{aligned}$$

   Insbesondere gilt $(13)\ H_1 \neq H_1\ (13)$, d.h. H_1 ist kein Normalteiler.

2. Es gilt $H_2 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ und somit gibt es genau $|S_3 : H_2| = \frac{6}{3} = 2$ disjunkte Linksnebenklassen (bzw. Rechtsnebenklassen). Die Linksnebenklassen lauten

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\ H_2 = H_2 &= \{\mathrm{id}, (123), (132)\} \text{ und} \\ (13)\ H_2 &= \{(13), (12), (23)\}. \end{aligned}$$

   Die Rechtsnebenklassen lauten

$$\begin{aligned} H_2\ \mathrm{id} = H_2 &= \{\mathrm{id}, (123), (132)\} \text{ und} \\ H_2\ (13) &= \{(13), (12), (23)\}. \end{aligned}$$

   Insbesondere gilt $\sigma H_2 = H_2 \sigma$ für alle $\sigma \in S_3$, d.h. H_2 ist ein Normalteiler.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H \leq J \leq G$. Welche der folgenden Aussagen haben allgemeine Gültigkeit? Beweisen Sie sie gegebenenfalls oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

1. $H \trianglelefteq G \Rightarrow J \trianglelefteq G$

2. $H \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq J$

3. $J \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

4. $J \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq J$

Es gilt:

1. Die Aussage ist falsch. Sei $G = S_3$, $H = \{\mathrm{id}\}$ und $J = \{\mathrm{id}, (12)\}$, so gilt offensichtlich $H \leq J \leq G$ und $H \trianglelefteq G$, aber Aufgabe 1 liefert, dass J kein Normalteiler von G ist.

2. Die Aussage ist richtig. Da $H \trianglelefteq G$, gilt $gH = Hg$ für alle $g \in G$. Insbesondere gilt somit auch $gH = Hg$ für alle $g \in J$, d.h. $H \trianglelefteq J$.

3. Die Aussage ist falsch. Seien $G = J = S_3$ und $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$, so gilt offensichtlich $H \leq J \leq G$ und $J \trianglelefteq G$, aber nach Aufgabe 1 ist H kein Normalteiler von G.

4. Die Aussage ist falsch. Seien $G = J = S_3$ und $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$, so gilt offensichtlich $H \leq J \leq G$ und $J \trianglelefteq G$, aber nach Aufgabe 1 ist H kein Normalteiler von $J = G$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

genau dann ein Homomorphismus ist, wenn G abelsch ist.

Beweis. Seien $g, h \in G$, so gilt

$$gh = \phi(g^{-1})\phi(h^{-1}) = \phi(g^{-1}h^{-1}) = (g^{-1}h^{-1})^{-1} = hg,$$

d.h. G ist abelsch.
Sei andersherum G abelsch, so gilt für alle $g, h \in G$

$$\phi(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = \phi(g)\phi(h),$$

d.h. ϕ ist ein Homomorphismus. □

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n. Die Alternierende Gruppe A_n vom Grad n ist die Untergruppe von S_n bestehend aus den Permutationen gerader Signatur. Entscheiden Sie, ob A_n ein Normalteiler von S_n ist und bestimmen Sie den Index $|S_n : A_n|$.

Sei $\mathrm{sgn} : (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$, $\sigma \mapsto \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ die Signum Funktion, die man üblicherweise in der linearen Algebra definiert. Die Abbildung sgn ist ein Homomorphismus und nach Definition gilt $\ker(\mathrm{sgn}) = A_n$. Somit ist A_n ein Normalteiler und es gilt nach dem Homomorphiesatz für Gruppen $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$. Also ist $|S_n : A_n| = 2$ für $n \geq 2$.
Für $n = 1$ ist $S_n = A_n = \{\mathrm{id}\}$, d.h. A_n ist ein Normalteiler von S_n und $|S_n : A_n| = 1$.