Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Die Gruppe G hat die Ordnung n, d.h. $\mid G \mid= n$. Zeigen Sie: G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

Beweis. Betrachte die Zuordnung

$$\phi : G \to \mathrm{Sym}(G),\ \ g \mapsto \phi_g$$

mit

$$\phi_g : G \to G,\ \ h \mapsto gh$$

für $g \in G$. Zunächst zeigen wir, dass die Zuordnung ϕ wohldefiniert ist, d.h. wir zeigen, dass ϕ_g bijektiv ist. Dazu geben wir die Umkehrabbildung ϕ_g^{-1} an. Es gilt offensichtlich $\phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}}$, also ist ϕ wohldefiniert.
Als nächstes zeigen wir, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien $g_1, g_2 \in G$, so gilt für alle $h \in G$

$$\phi(g_1g_2)(h) = \phi_{g_1g_2}(h) = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}(h) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)(h),$$

m.a.W. $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$, d.h. ϕ ist ein Homomorphismus.
Sei nun $g \in G$ mit $\phi(g) = \mathrm{id}_G$, so gilt $e = \mathrm{id}_G(e) = \phi(g)(e) = \phi_g(e) = ge = g$. Somit ist $\ker(\phi) = \{e\}$ und ϕ injektiv. Insgesamt erhalten wir, dass G isomorph zu $\mathrm{Im}(\phi) \leq \mathrm{Sym}(G)$ ist.
Abschließend zeigen wir, dass für eine Menge $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit $|X| = m \in \mathbb{N}$ gilt, $\mathrm{Sym}(X) \cong S_m$. Dazu geben wir einen Isomorphismus an, der wie folgt lautet

$$\psi : S_m \to \mathrm{Sym}(X),\ \ \sigma \mapsto [\sigma' : x_i \mapsto x_{\sigma(i)}].$$

Offensichtlich ist ψ bijektiv. Es bleibt noch zu zeigen, dass ψ ein Homomorphismus ist. Seien dafür $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Sym}(X)$, so gilt für alle $x_i \in X$

$$\psi(\sigma_1\sigma_2)(x_i) = x_{\sigma_1\sigma_2(i)} = \psi(\sigma_1)x_{\sigma_2(i)} = \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)(x_i),$$

d.h. ψ ist ein Homomorphismus.
Insgesamt gilt also für $X = G$

$$G \cong \mathrm{Im}(\psi \circ \phi) \leq S_n.$$

$\square$

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Beweis. Für alle $g \in G$ gilt offensichtlich $g^{-1} = g$, sodass für alle $g, h \in G$ gilt

$$gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg,$$

d.h. G ist abelsch. □

Aufgabe 3. Sei G endlich und abelsch. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\prod_{g \in G} g^2 = e$$

gilt.

Beweis. Da G endlich und abelsch ist, kann man das Produkt beliebig umsortieren. Man erhält

$$\prod_{g \in G} g^2 = \prod_{g = g^{-1}} g^2 \cdot \prod_{g \neq g^{-1}} g^2 = \prod_{g \neq g^{-1}} g^2 = \prod_{g \neq g^{-1}} g \cdot \prod_{g \neq g^{-1}} g^{-1} = \prod_{g \neq g^{-1}} gg^{-1} = e.$$

□

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{End}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Endomorphismus von } G\}$$

einen Monoid bezüglich der Komposition von Gruppenhomorphismen bildet.
Bestimmen Sie die Gruppen G, für die $\mathrm{End}(G)$ eine Gruppe ist.
Zeigen Sie ferner, dass

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Automorphismus von } G\}$$

eine Gruppe bildet. Bestimmen Sie $\mathrm{End}\left((\mathbb{Z}, +)\right)$ und $\mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}, +)\right)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{End}(G)$ ein Monoid ist. Die Komposition ist offensichtlich eine Verknüpfung, die assoziativ ist. Das neutrale Element ist die Identität id_G. Somit ist $\mathrm{End}(G)$ ein Monoid.

Als nächstes zeigen wir, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe ist. Seien $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$, so ist die Abbildung $\phi \circ \psi$ ein bijektiver Homomorphismus, also auch ein Element von $\mathrm{Aut}(G)$, d.h. $\mathrm{Aut}(G)$ ist unter der Komposition abgeschlossen. Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, so existiert wegen der Bijektivität eine Umkehrabbildung ϕ^{-1}. Die Umkehrabbildung ist ein Homomorphismus, denn seien $a, b \in G$, so existieren $x, y \in G$ mit $a = \phi(x), b = \phi(y)$ und es gilt

$$\phi^{-1}(ab) = \phi^{-1}(\phi(x)\phi(y)) = \phi^{-1}(\phi(xy)) = xy = \phi^{-1}(a)\phi^{-1}(b).$$

Insgesamt erhalten wir, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe ist.

Wir zeigen im Folgenden, dass G genau dann die triviale Gruppe ist, wenn $\mathrm{End}(G)$ eine Gruppe ist. Betrachte hierfür den Gruppenendomorphismus $f : G \to G,\ g \mapsto e$.

Die Abbildung f ist genau dann invertierbar, wenn $\mid G \mid= 1$ gilt. Aus letzterem folgt die Behauptung.

Wir zeigen, dass man End($\mathbb{Z}$) eindeutig mit $\mathbb{Z}$ identifizieren kann, vermöge der folgenden Abbildung

$$\psi : \mathrm{End}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},\ f \mapsto f(1).$$

Stelle hierfür zunächst fest, dass für alle $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ und $z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z \cdot 1) \\ &= f(\varepsilon|z|1) \\ &= f\left((\varepsilon 1) + \ldots + (\varepsilon 1)\right) \\ &= f(\varepsilon 1) + \ldots + f(\varepsilon 1) \\ &= \varepsilon|z|f(1) \\ &= zf(1), \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = sgn(z)$ (das Vorzeichen von z). D.h. f ist eindeutig durch den Wert $f(1) \in \mathbb{Z}$ definiert. Letzteres liefert die Injektivität von ψ, denn seien $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ mit $g(1) = \psi(g) = \psi(f) = f(1)$, so gilt für alle $z \in \mathbb{Z}$

$$g(z) = zg(1) = zf(1) = f(z).$$

Wir zeigen, dass Aut($\mathbb{Z}$) nur aus den Elementen f besteht, für die $f(1) \in \{+1, -1\}$ gilt. Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ mit $f(1) = z \in \mathbb{Z}$, so gilt offensichtlich, dass $f^{-1}(z) = 1$. Da $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ gilt, erhalten wir $1 = f^{-1}(z) = zf^{-1}(1)$ und somit $f^{-1}(1) = \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}$. Dies kann nur zutreffen, wenn $z \in \{+1, -1\}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$