Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Körper

(1) $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$,

(2) $L_2 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$.

Welche der Erweiterungen $L_i|\mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, ist Galoissch? Bestimmen Sie gegenfalls jeweils die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L_i|\mathbb{Q})$.

(1) Die Erweiterung $L_1|\mathbb{Q}$ ist nicht normal, was man wie folgt leicht einsieht. Das Polynom $X^3 - 2$ ist nach dem Eisenstein Kriterium irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und besitzt in L_1 eine Nullstelle. Allerdings zerfällt es nicht über L_1, denn die Nullstelle $\zeta_3 \sqrt[3]{2}$ mit $\zeta_3 := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ liegt offensichtlich nicht in L_1. Also ist $L_1|\mathbb{Q}$ nicht normal und somit auch nicht Galoissch.

(2) Die Erweiterung $L_2|\mathbb{Q}$ ist Galoissch. Wegen $\mathrm{char}(L_2) = \mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ ist $L_2|\mathbb{Q}$ separabel. Des Weiteren ist L_2 der Zerfällungskörper der Polynome $X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - \zeta_3 \sqrt[3]{2})(X - \zeta_3^2 \sqrt[3]{2})$ und $X^2 + 3 = (X - \sqrt{-3})(X + \sqrt{-3})$, denn offensichtlich gilt

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) = L_2.$$

Somit ist $L_2|\mathbb{Q}$ normal und auch Galoissch. Die Ordnung der Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(L_2|\mathbb{Q})$ ist $[L_2 : \mathbb{Q}] = [L_2 : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$ und die Automorphismen werden durch die folgenden sechs Zuordnungen induziert

$$\sigma_{ij} : \zeta_3 \mapsto \zeta_3^i,\ \sqrt[3]{2} \mapsto \zeta_3^j \sqrt[3]{2} \quad \text{für } 1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3,$$

denn ζ_3, ζ_3^2 haben das gemeinsame Minimalpolynom $X^2 + X + 1$ über $\mathbb{Q}$ und $\zeta_3^j \sqrt[3]{2}$ haben das gemeinsame Minimalpolynom $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ für $1 \le j \le 3$.
Für eine alternative Berechnung der Galoisgruppe betrachte Aufgabe 4. Dort werden wir feststellen, dass $\mathrm{Gal}(L_2|\mathbb{Q}) \cong S_3$ gilt.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Erweiterung $L|\mathbb{Q}$, wobei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(1) Zeigen Sie, dass $L|\mathbb{Q}$ Galoissch ist.

(2) Beschreiben Sie

- alle Untergruppen der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ und
- alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq L$

und erklären Sie, welche Untergruppen welchen Zwischenkörpern unter der Galoiskorrespondenz (Satz 4.6 der Vorlesung) entspricht. Welche der hierbei auftretenden Zwischenerweiterungen sind normal? Welche der auftretenden Galoisgruppen sind normal?

(1) Wegen $\mathrm{char}(L) = 0$ ist $L|\mathbb{Q}$ separabel. Des Weiteren ist L der Zerfällungskörper der Polynome $X^2 - 2$ und $X^2 - 3$, woraus die Normalität von $L|\mathbb{Q}$ folgt.

(2) Nach Blatt 8 Aufgabe 3 ist $[L : \mathbb{Q}] = 4$ und somit gilt $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = 4$. Die Elemente der Galoigruppe werden durch folgende vier Zuordnungen mit $i, j \in \{0, 1\}$ induziert

$$\sigma_{ij} : \sqrt{2} \mapsto (-1)^i \sqrt{2},\ \sqrt{3} \mapsto (-1)^j \sqrt{3}.$$

Dies zeigt, dass jedes Element, außer der Identität, Ordnung zwei hat. Nach Blatt 2 Aufgabe 4 ist $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ die Kleinsche Vierergruppe und somit sind die Untergruppen mit $\sigma_{00} = id_L$

$$\{id_L\},\ \{id_L, \sigma_{01}\},\ \{id_L, \sigma_{11}\},\ \{id_L, \sigma_{10}\}, \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}).$$

Dem gegenübergestellt sind die Zwischenkörper

$$L, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{6}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}\,.$$

Offensichtlich sind alle genannten Untergruppen und Zwischenkörper normal.

Aufgabe 3. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, wobei ζ_3 eine nichttriviale dritte Einheitswurzel ist, d.h. eine von 1 verschiedene Lösung der Gleichung $X^3 = 1$ in $\overline{\mathbb{Q}}$, einem festen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$.

(1) Zeigen Sie, dass $L|\mathbb{Q}$ Galoissch ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe G.

(2) Bestimmen Sie, wenn möglich, Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq E_i \leq L_i$, $i \in \{1, 2\}$, derart, dass

- die Erweiterung $E_1|\mathbb{Q}$ normal ist, bzw.
- die Erweiterung $E_2|\mathbb{Q}$ nicht normal ist.

oder argumentieren Sie, wieso solche Erweiterungen nicht existieren.

Beweis. (1) Die Erweiterung wurde bereits in Aufgabe 1 (2) untersucht. Dort wurde insbesondere die Galoisgruppe errechnet.
Alternativ kann man L auch als Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^3 - 2$ betrachten. Die Galoisgruppe operiert, wegen der Irrduzibilität von f, transitiv auf der Nullstellenmenge $\{\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2\sqrt[3]{2}\}$, also gilt $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong S_3$ und somit $[L : \mathbb{Q}] = 6 = 3! = \deg(f)!$ (vgl. Satz 4.10).

(2) Im ersten Aufgabenteil haben wir festgestellt, dass die Galoisgruppe ismorph zu S_3 ist und somit lauten die Untergruppen

$$\{1\},\ \langle(1\ 2)\rangle,\ \langle(1\ 3)\rangle,\ \langle(2\ 3)\rangle,\ \langle(1\ 2\ 3)\rangle \text{ und } S_3,$$

wobei lediglich die trivialen Untergruppen und $\langle(1\,2\,3)\rangle$ Normalteiler von S_3 sind. Die normalen Erweiterungen sind nach der Galoiskorrespondenz also

$$L^{\{1\}} = L,\ L^{\langle(1\ 2\ 3)\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3),\ L^{S_3} = \mathbb{Q}$$

und die nicht normalen lauten

$$L^{\langle(1\ 2)\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3^2\sqrt[3]{2}),\ L^{\langle(1\ 3)\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3\sqrt[3]{2}),\ L^{\langle(2\ 3)\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}).$$

□

Aufgabe 4. Sei L eine endliche normale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit

$$|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = 8$$

und der Eigenschaft, dass jedes Element von $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \setminus \{id_L\}$ Ordnung zwei hat. Wie viele Unterkörper, die Grad vier über $\mathbb{Q}$ haben, besitzt L?

Beweis. Nach der (endlichen) Galoiskorrespondenz ist die Menge der Untergruppen von G bijektiv zu der Menge der Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$ und es gilt für alle $H \leq G$ nämlich $[L : L^H] = |H|$. Also reicht es wegen

$$[L^H : \mathbb{Q}] = \frac{[L : \mathbb{Q}]}{[L : L^H]} = \frac{8}{|H|} = 4$$

aus, die Anzahl der Untergruppen H von G mit $|H| = 2$ zu finden.
Sei $G := \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) = \{id_L, \sigma_1, \ldots, \sigma_7\}$, so folgt direkt aus den Voraussetzungen, dass die Untergruppen der Ordnung zwei gerade $\{id_L, \sigma_i\}$ mit $1 \leq i \leq 7$ sind. Also gibt es genau sechs Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$ mit Grad vier über $\mathbb{Q}$.

□

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ des Polynoms

$$f = (X^3 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X].$$

Zunächst zerfällt das Polynom über $\overline{\mathbb{Q}}$ wie folgt

$$f = (X - \sqrt[3]{2})(X - \zeta_3 \sqrt[3]{2})(X - \zeta_3^2 \sqrt[3]{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}),$$

wobei $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Der Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$ ist also

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}).$$

Der Grad der Körpererweiterung ergibt sich wie folgt

$$[L : Q] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3} : \mathbb{Q})] = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12,$$

denn das Minimalpolynom von $\zeta_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ ist $X^2 + X + 1$, das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist $X^3 - 2$ und das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ ist $X^2 - 3$.
Die Galoisgruppe hat Ordnung $[L : \mathbb{Q}]$ und jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \sqrt{3})|\mathbb{Q})$ operiert auf den Mengen $\{\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}\}$ und $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ und ist dadurch eindeutig bestimmt, d.h. $\mathrm{Gal}(L|K) \hookrightarrow S_3 \times S_2$ (injektiv). Wegen

$$|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 12 = |S_3| \cdot |S_2| = |S_3 \times S_2|$$

gilt $\mathrm{Gal}(L|K) \cong S_3 \times S_2$.