Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Seien G eine Gruppe, X eine Menge und

$$G \times X \to X, \ (g, x) \mapsto gx$$

eine Aktion von G auf X. Seien weiterhin $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die Isotropiegruppen G_x und G_y in G konjugiert sind, wenn x und y in derselben Bahn liegen, d.h. wenn $Gx = Gy$.

Beweis. Da $Gx = Gy$ gilt, existiert ein $g \in G$ mit $gx = y$. Sei nun $h \in G_x$, so gilt

$$(ghg^{-1})y = (ghg^{-1})gx = (gh)x = gx = y$$

und somit $ghg^{-1} \in G_y$, d.h. $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$. Aus $g^{-1}y = x$ folgt analog $g^{-1}G_yg \subseteq G_x$, d.h. $G_y = gG_xg^{-1}$. □

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit Zentrum Z. Zeigen Sie: Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch. Schließen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2, wobei p eine Primzahl ist, abelsch ist.

Beweis. Sei $a \in G$ mit $\langle \overline{a} \rangle = G/Z$ und $g, h \in G$ mit $\overline{g} = \overline{a}^m$, $\overline{h} = \overline{a}^n$. Es existieren $b, c \in Z$ mit $g = a^m b$, $h = a^n c$, also folgt

$$gh = a^m b a^n c = a^{m+n} bc = a^{m+n} cb = a^n c a^m b = hg.$$

Sei nun $|G| = p^2$, wobei p eine Primzahl ist. Nach Satz 5.11 besitzt G ein nicht-triviales Zentrum Z. Das Lemma von Lagrange impliziert somit $|Z| \in \{p, p^2\}$. Ist $|Z| = p^2$, so folgt $Z = G$ und somit ist G abelsch. Ist $|Z| = p$, so gilt $|G/Z| = \frac{p^2}{p} = p$ und somit ist G/Z zyklisch. Mit obiger Aussage folgt nun, dass G abelsch ist. □

Aufgabe 3. Seien K ein Körper und V ein K–Vektorraum. Die Menge

$$\mathrm{Proj}(V) := \{U \leq V \mid \dim_K U = 1\}$$

heißt die Projektivisierung von V.

(1) Zeigen Sie:

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Proj}(V) \to \mathrm{Proj}(V), \ (g, U) \mapsto g(U)$$

ist eine transitive Aktion der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{Proj}(V)$.

(2) Sei nun $\dim_K V = n < \infty$. Wir bezeichnen V mit K^n und $\mathrm{GL}(V)$ mit $G := GL_n(K)$. Sei $U = \langle e_1 \rangle_K$ der vom ersten Standardeinheitsvektor $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in K^n$ erzeugte eindimensionale K–Unterraum von K^n. Bestimmen Sie explizit die Isotropiegruppe G_U von U unter der oben beschriebenen Aktion von G.

(3) Sei nun zusätzlich $|K| < \infty$. Bestimmen Sie die Ordnung $|G|$ und $|G_U|$ und benutzen Sie diese Daten, um $|\mathrm{Proj}(K^n)|$ zu bestimmen.

Beweis. (1) Aus einfachen Resultaten der linearen Algebra folgt, dass eine Gruppenaktion vorliegt (bitte selbst einmal nachprüfen). Die Transitivität kann man wie folgt zeigen. Seien $U_1 = \langle u_1 \rangle_K$, $U_2 = \langle u_2 \rangle_K$ je eindimensionale Unterräume von V, so können wir u_1 (bzw. u_2) zu einer Basis B_1 (bzw. B_2) von V fortsetzen. Die Basen haben dieselbe Mächtigkeit, d.h. es existiert eine Bijektion α zwischen B_1 und B_2, welche wir modifizieren können, sodass diese u_1 auf u_2 abbildet. Die Abbildung α lässt sich nun linear auf den gesamten Vektorraum V fortsetzen und wir erhalten dadurch einen Isomorphismus, der U_1 auf U_2 abbildet, was die Transitivität beweist.

(2) Sei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so kann man einfach nachprüfen, dass mit $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_K$ gilt

$$G_U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; \lambda \in K^* \right\}.$$

(3) Es gilt mit $K = \mathbb{F}_q$, $q = p^m$ eine Primzahlpotenz und $|V| = |(\mathbb{F}_q)^n| = |\mathbb{F}_{q^n}|$

$$|G| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k) = (q^n - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(q^n - q^k) = (q^n - 1)\prod_{k=1}^{n-1} q(q^{n-1} - q^{k-1}) = (q^n - 1)q^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(q^{n-1} - q^k)$$

und

$$|G_U| = (q-1)q^{n-1}|\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F}_q)| = (q-1)q^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(q^{n-1} - q^k).$$

Wegen $|V| = q^n < \infty$ ist $|\mathrm{Proj}(V)| < \infty$ und da die Gruppenaktion transitiv ist, gilt nach Korollar 5.5

$$|\mathrm{Proj}(V)| = \frac{|G|}{|G_U|} = \frac{(q^n - 1)q^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(q^{n-1} - q^k)}{(q-1)q^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(q^{n-1} - q^k)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

□

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für $g \in G$ bezeichne $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ die Menge der Fixpunkte von g. Zeigen Sie, dass die Anzahl $|X/G|$ der Bahnen von G auf X durch die durchschnittliche Anzahl von Fixpunkten gegeben ist, d.h.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|X^g|.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G}|X^g| &= \sum_{g\in G}|\{x \in X \mid gx = x\}| \\
&= |\dot{\bigcup_{g\in G}}\{(g,x) \mid x \in X,\ gx = x\}| \\
&= |\{(g,x) \in G \times X \mid gx = x\}| \\
&= |\dot{\bigcup_{x\in X}}\{(g,x) \mid g \in G,\ gx = x\}| \\
&= \sum_{x\in X}|\{(g,x) \mid g \in G,\ gx = x\}| \\
&= \sum_{x\in X}|\{g \in G \mid gx = x\}| \\
&= \sum_{x\in X}|G_x| \\
&\overset{\text{Bahnensatz}}{=} \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|} \\
&= |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} \\
&= |G|\sum_{\mathcal{O}\in X/G}\sum_{x\in\mathcal{O}}\frac{1}{|Gx|} \\
&= |G|\sum_{\mathcal{O}\in X/G}\sum_{x\in\mathcal{O}}\frac{1}{|\mathcal{O}|} \\
&= |G|\cdot|X/G|.
\end{aligned}$$

Aus der obigen Gleichheit folgt die Behauptung. □