# Übungsblatt 2

**Aufgabe 1.** Sei $H$ eine Untergruppe von $G$ vom Index 2. Zeigen Sie, dass $H$ ein Normalteiler von $G$ ist.

*Beweis.* Da der Index $|G : H| = 2$ ist, existiert ein $g \in G \setminus H$. Somit gilt offensichtlich

$$gH \neq H \neq Hg$$

und

$$H \,\dot{\cup}\, gH = G = H \,\dot{\cup}\, Hg.$$

Insgesamt erhalten wir

$$gH = \left(H \,\dot{\cup}\, gH\right) \setminus H = G \setminus H = \left(H \,\dot{\cup}\, Hg\right) \setminus H = Hg.$$

Also ist $H$ ein Normalteiler. $\square$

**Aufgabe 2.** Zwei Elemente $h, h' \in G$ heißen konjugiert, wenn es ein $g \in G$ mit $h' = ghg^{-1}$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass Konjugiertheit von Elementen eine Äquivalenzrelation auf $G$ ist. Ihre Äquivalenzklassen werden Konjugiertenklassen von $G$ genannt.
2. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe $H \leq G$ genau dann ein Normalteiler von $G$ ist, wenn $H$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen von G ist.
3. Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppe $S_3$.

*Beweis.*

1. Sei $h \in G$, so gilt $h = ehe$ und somit die Reflexivität der Relation. Sei zusätzlich $h' \in G$ mit $h' = ghg^{-1}$ für ein $g \in G$, so gilt $h = g^{-1}h'g$, d.h. die Symmetrie der Relation. Für die Transitivität sei zusätzlich $h'' = g'h'g'^{-1}$ für ein $h'' \in H$ und $g' \in G$. Somit gilt

$$h'' = g'h'g'^{-1} = g'ghg^{-1}g'^{-1} = (g'g)h(g'g)^{-1},$$

d.h. die Transitivität der Relation.

2. Sei $R \subseteq G$ ein minimales Represäntentsystem der obigen Äquivalenzrelation und $\{K_r \mid r \in R\}$ die dazugehörigen Konjugiertenklassen. Nach Definition gilt $K_r = \bigcup_{g \in G} grg^{-1}$ für $r \in R$.
   Sei nun $R' \subseteq R$ mit $H = \bigcup_{r \in R'} K_r$. Offensichtlich gilt $gK_rg^{-1} = K_r$ für alle $g \in G$ und $r \in R$. Somit erhalten wir

$$gHg^{-1} = g\left(\bigcup_{r \in R'} K_r\right)g^{-1} = \bigcup_{r \in R'} \left(gK_rg^{-1}\right) = \bigcup_{r \in R'} K_r = H.$$

   Letzteres ist äquivalent zu $gH = Hg$.
   Sei nun $H$ ein Normalteiler. Da $H$ abgeschlossen unter Konjugation ist, d.h. $gHg^{-1} = H$ ist, gilt für jedes Element aus $H$, dass die dazugehörige Konjugiertenklasse in $H$ enthalten ist. Sei also $R' \subseteq R$ minimal, sodass jedes Element von $H$ in einer Konjugiertenklasse $K_r$ mit $r \in R'$ enthalten ist. Aus vorherigem folgt, dass $K_r \subseteq H$ für alle $r \in R'$ und somit insgesamt $H = \bigcup_{r \in R'} K_r$.

$\square$

3. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Konjugiertenklassen von $S_3$ wie folgt lauten

$$K_{\mathrm{id}} = \{\mathrm{id}\},\; K_{(12)} = \{(12), (13), (23)\} \text{ und } K_{(123)} = \{(123), (132)\}.$$

**Aufgabe 3.** Seien $H_1, H_2$ Untergruppen von $G$ mit $H_1 \subseteq H_2$, und $H_1$ habe endlichen Index in $G$. Zeigen Sie,

1. dass auch $H_2$ endlichen Index in $G$ hat und

2. dass
$$|G : H_1| = |G : H_2| \cdot |H_2 : H_1|$$
gilt.

*Beweis.* 1. Sei $R_1 \subseteq G$ ein minimales Representantensystem von Linksnebenklassen von $H_1$ in $G$, so gilt $|G : H_1| = |R_1| < \infty$. Wähle $R_2 \subseteq G$ ein minimales Representantensystem von Linksnebenklassen von $H_2$ in $G$, so ist zu zeigen, dass $|R_2| \leq |R_1|$ gilt.
Seien $r, r' \in R_2$, so zeigen wir, dass $rH_1 = r'H_1$ genau dann wenn $r = r'$ gilt. Wenn $r = r'$, so ist offensichtlich $rH_1 = r'H_1$. Andersherum sei $rH_1 = r'H_1$, so gilt $rH_2 \supseteq rH_1 = r'H_1 \subseteq r'H_2$. Also sind die Nebenklassen $rH_2, r'H_2$ nicht disjunkt und müssen somit übereinstimmen.
Da zusätzlich jedes $r \in R_2$ sich in einer Nebenklasse von $r' \in R_1$ befindet, können wir o.E. annehmen, dass $R_2 \subseteq R_1$ gilt. Aus vorherigem folgt $|R_2| \leq |R_1|$.

2. Seien $R_2 \subseteq G$ ein minimales Repräsentantensystem von Linksnebenklassen von $H_2$ in $G$, $R_1 \subseteq G$ ein minimales Repräsentantensystem von Linksnebenklassen von $H_1$ in $G$ und $R_{1,2} \subseteq H_2$ ein minimales Repräsentantensystem von Linksnebenklassen von $H_1$ in $H_2$. Wir werden zeigen, dass
$$G/H_1 = \{r\overline{r}H_1 \mid r \in R_2, \overline{r} \in R_{1,2}\},$$
genauer, $\{r\overline{r} \mid r \in R_2, \overline{r} \in R_{1,2}\}$ bildet ein minimales Repräsentatensystem von Linksnebenklassen von $H_1$ in $G$.
Sei $gH_1 \in G/H_1$ mit $g \in R_1$, so existiert genau ein $r \in R_2$ mit $g = rH_2$. Also existiert genau ein $h_2 \in H_2$ mit $g = rh_2$. Das Element $h_2$ ist in genau einer Nebenklasse $\overline{r}H_1$ mit $\overline{r} \in R_{1,2}$, d.h. es existiert genau ein $h_1 \in H_1$ mit $h_2 = \overline{r}h_1$. Insgesamt gilt also
$$gH_1 = rh_2H_1 = r\overline{r}h_1H_1 = r\overline{r}H_1 \in \{r\overline{r}H_1 \mid r \in R_2, \overline{r} \in R_{1,2}\},$$
woraus $G/H_1 = \{r\overline{r}H_1 \mid r \in R_2, \overline{r} \in R_{1,2}\}$ folgt.
Als nächstes zeigen wir, dass $r\overline{r}H_1$ paarweile disjunkt für alle $r \in R_2, \overline{r} \in R_{1,2}$ sind. Seien hierfür $r', r'' \in R_2$ und $\overline{r}, \overline{\overline{r}} \in R_{1,2}$ mit $r'\overline{r}H_1 = r''\overline{\overline{r}}H_1$. Offensichtlich gilt
$$r'H_2 = r'\overline{r}H_2 \supseteq r'\overline{r}H_1 = r''\overline{\overline{r}}H_1 \subseteq r''\overline{\overline{r}}H_2 = r''H_2$$
und somit gilt $r' = r''$. Aus letzterem folgt $\overline{r} = \overline{\overline{r}}$.
Wir erhalten somit wegen $|G : H_2| = |R_2| < \infty$ (Teil 1)
$$\begin{aligned}
|G : H_1| &= |G/H_1| \\
&= |\dot{\bigcup_{r \in R_2}} \{r\overline{r}H_1 \mid \overline{r} \in R_{1,2}\}\,| \\
&= \sum_{r \in R_2} |\,\{r\overline{r}H_1 \mid \overline{r} \in R_{1,2}\}\,| \\
&= \sum_{r \in R_2} |R_{1,2}| \\
&= |R_2| \cdot |R_{1,2}| \\
&= |G : H_2| \cdot |H_2 : H_1|.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4.** Sei $G = \{e, a_1, a_2, a_3\}$ eine Gruppe der Ordnung 4, die nicht zyklisch ist, d.h. $G \neq \langle g \rangle$ für alle $g \in G$.

1. Zeigen Sie, dass $a_i^2 = e$ gilt für alle $i \in \{1,2,3\}$ und dass, für jede Permutation $i,j,k$ der Indizes $1,2,3$ die Relation $a_i a_j = a_k$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Automorphismus von } G\}$$

zur symmetrischen Gruppe $S_3$ isomorph ist.

3. Bestimmen Sie eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S_4$, die zu $G$ isomorph ist.

*Beweis.* 1. Nach Fermat's kleinem Satz gilt $\mathrm{ord}(a_i) \mid |G| = 4$ für alle $1 \le i \le 3$, d.h. $\mathrm{ord}(a_i) \in \{1,2,4\}$. Da $G$ nicht zyklisch ist, sind die Ordnungen der Elemente von $G$ maximal zwei und da $a_i \neq e$ für alle $1 \le i \le 3$ gilt, folgt $\mathrm{ord}(a_i) = 2$. Letzteres ist gleichbedeuted mit $a_i^2 = e$ für alle $1 \le i \le 3$.
Seien $i,j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$, so betrachte $a_i a_j$. Angenommen $a_i a_j = a_i$, so gilt $a_j = e$, ein Widerspruch. Analog, wenn $a_i a_j = a_j$, so folgt $a_i = e$, ein Widerspruch. Also folgt $a_i a_j = a_k$ mit $k \in \{1,2,3\}$ und $i \neq k \neq j$.

2. Betrachte die folgende Abbildung

$$\psi : S_3 \to \mathrm{Aut}(G),\ \sigma \mapsto [f_\sigma : e \mapsto e,\ a_i \mapsto a_{\sigma(i)}].$$

Wir zeigen im Folgenden, dass $\psi$ ein Isomorphismus ist. Sei $\sigma \in S_3$, so ist $f_\sigma$ offensichtlich bijektiv. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f_\sigma(ea_i) &= f_\sigma(a_i) = f_\sigma(e)\, f_\sigma(a_i), \\ f_\sigma(a_i e) &= f_\sigma(a_i)\, f_\sigma(e), \\ f_\sigma(a_i a_i) &= f_\sigma(e) = e = a_{\sigma(i)} a_{\sigma(i)} = f_\sigma(a_i)\, f_\sigma(a_i) \text{ und} \\ f_\sigma(a_i a_j) &= f_\sigma(a_k) = a_{\sigma(k)} = a_{\sigma(i)} a_{\sigma(j)} = f_\sigma(a_i)\, f_\sigma(a_j) \end{aligned}$$

für alle $i,j,k \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$ and $i \neq k \neq j$, d.h. $f_\sigma$ ist ein Homomorphismus und somit ist $\psi$ wohldefiniert.
Des Weiteren ist leicht zu sehen, dass $\psi$ ein Homomorphismus ist, denn seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$, so gilt

$$\psi(\sigma_1\sigma_2)(a_i) = f_{\sigma_1\sigma_2}(a_i) = a_{\sigma_1\sigma_2(i)} = f_{\sigma_1}(a_{\sigma_2(i)}) = f_{\sigma_1} f_{\sigma_2}(a_i) = \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)(a_i)$$

und analoges gilt für $\psi(\sigma_1\sigma_2)(a_i e) = \psi(\sigma_1\sigma_2)(ea_i)$. Außerdem ist $\psi$ injektiv, denn seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ mit $\psi(\sigma_1) = f_{\sigma_1} = f_{\sigma_2} = \psi(\sigma_2)$, so gilt für alle $1 \le i \le 3$

$$a_{\sigma_2(i)} = f_{\sigma_2}(a_i) = f_{\sigma_1}(a_i) = a_{\sigma_1(i)},$$

woraus $\sigma_1 = \sigma_2$ folgt. Aus $\mid S_3 \mid \geq \mid \mathrm{Aut}(G) \mid$ folgt nun die Bijektivität von $\psi$.

□

3. Wir benutzen Blatt 1 Aufgabe 1 und erhalten mit $a_4 := e$ die Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G) \cong S_4$ mit

$$e \mapsto \mathrm{id},\ a_1 \mapsto (14)(23),\ a_2 \mapsto (24)(13),\ a_3 \mapsto (34)(12).$$

Also ist die Untergruppe $\{\mathrm{id}, (14)(23), (24)(13), (34)(12)\} \le S_4$ zu $G$ isomorph.