Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ nicht endlich ezeugt ist.

Beweis. Angenommen $\mathbb{Q}$ ist endlich erzeugt mit Erzeugendensystem $\{\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}\}$ mit $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $q := \prod_{i=1}^{n} q_i \in \mathbb{N}$, so betrachte $z := \frac{1}{2q} \in \mathbb{Q}$. Nach Voraussetzung existieren $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ mit $z = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{p_i}{q_i}$ und offensichtlich gilt mit $\frac{q}{q_i} \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq i \leq n$

$$qz = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i \frac{q}{q_i} \in \mathbb{Z}.$$

Aus letzterem folgt $qz = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, ein Widerspruch. □

Aufgabe 2. Seien G eine Gruppe und $K \leq G$ eine Untergruppe vom Index n in G. Zeigen Sie, dass

1. $g^n \in K$ gilt für alle $g \in G$, falls $K \lhd G$,
2. dies aber im Allgemeinen nicht gilt, falls K kein Normalteiler von G ist.

Beweis.
1. Sei $g \in G$, so betrachte das Gruppenelement $gK \in G/K$. Da $|G/K| = n$ gilt, ist nach dem kleinen Fermat $g^n K = (gK)^n = K$ das neutrale Element der Gruppe G/K. Insbesondere folgt $g^n \in K$.
2. Betrachte $G = S_3$, $K = \langle (12) \rangle = \{\mathrm{Id}, (12)\} \leq G$ und $g = (23)$. Es gilt $|G : K| = \frac{6}{2} = 3$, aber $g^3 = (23)^3 = (23)^2(23) = (23) \notin K$.

□

Aufgabe 3. Seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G von endlichem Index in G und H eine Untergruppe von G, deren Ordnung endlich und teilerfremd zum Index $|G : N|$ von N in G ist. Zeigen Sie, dass H in N enthalten ist.

Beweis. Sei $h \in H$, so gilt $\mathrm{ord}(h) \mid |H|$ und $\mathrm{ord}(hN) \mid |G/N|$. Aus $(hN)^{\mathrm{ord}(h)} = h^{\mathrm{ord}(h)} N = N$ folgt $\mathrm{ord}(hN) \mid \mathrm{ord}(h)$ und somit auch $\mathrm{ord}(hN) \mid |H|$. Insgesamt erhalten wir

$$\mathrm{ord}(hN) \mid \mathrm{ggT}(|H|, |G/N|) = 1,$$

d.h. $\mathrm{ord}(hN) = 1$. Letzteres ist gleichbedeutend mit $h \in N$. □

Aufgabe 4. Es bezeichne $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen sowie, wie gewohnt, S_3 die symmetrische Gruppe vom Grad 3. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

gilt.

Beweis. Nach Definition gilt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2) \mid \det(A) = 1\}$ und es ist einfach nachzurechnen, dass

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die obigen Matrizen kann man nun als Permutation der Menge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{F}_2^2 \setminus \mathbf{0}.$$

auffassen. Insbesondere gilt somit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \leq \mathrm{Sym}(L) \cong S_3$. Da aber $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)| = 6 = |S_3|$ gilt, folgt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{Sym}(L) \cong S_3$. □