Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Es seien R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikativer Untermonoid. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

Beweis. Sei R' ein Ring mit Ringhomomorphismus $\Phi : R \to R'$ und $\Phi(S) \subseteq (R')^*$, so definiere

$$\bar{\Phi} : S^{-1}R \to R'; \ \frac{a}{b} \mapsto \Phi(a)\Phi(b)^{-1}.$$

Die Abbildung $\bar{\Phi}$ ist wohldefiniert, denn seien $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in S^{-1}R$ mit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, so gilt $ab'c = a'bc$ für ein $c \in S$ und damit

$$\Phi(a)\Phi(b')\Phi(c) = \Phi(ab'c) = \Phi(a'bc) = \Phi(a')\Phi(b)\Phi(c).$$

Letzteres impliziert wegen $\Phi(b'), \Phi(b), \Phi(c) \in (R')^*$

$$\bar{\Phi}\left(\frac{a}{b}\right) = \Phi(a)\Phi(b)^{-1} = \Phi(a')\Phi(b')^{-1} = \bar{\Phi}\left(\frac{a'}{b'}\right).$$

Des Weiteren ist $\bar{\Phi}$ ein Ringhomomorphismus, denn für $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in S^{-1}R$ gilt

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) &= \bar{\Phi}\left(\frac{ab' + a'b}{bb'}\right) \\
&= \Phi(bb')^{-1}\Phi(ab' + a'b) \\
&= \Phi(b)^{-1}\Phi(b')^{-1}\left(\Phi(a)\Phi(b') + \Phi(a')\Phi(b)\right) \\
&= \Phi(b)^{-1}\Phi(a) + \Phi(b')^{-1}\Phi(a') \\
&= \bar{\Phi}\left(\frac{a}{b}\right) + \bar{\Phi}\left(\frac{a'}{b'}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\bar{\Phi}\left(\frac{a}{b}\frac{a'}{b'}\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{aa'}{bb'}\right) = \Phi(aa')\Phi(bb')^{-1} = \Phi(a)\Phi(a')\Phi(b)^{-1}\Phi(b')^{-1} = \bar{\Phi}\left(\frac{a}{b}\right)\bar{\Phi}\left(\frac{a'}{b'}\right).$$

Als nächstes zeigen wir, dass $\Phi = \bar{\Phi} \circ \iota$ gilt. Sei $r \in R$, so folgt

$$\bar{\Phi} \circ \iota(r) = \bar{\Phi}\left(\frac{r}{1}\right) = \Phi(r)\Phi(1)^{-1} = \Phi(r).$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, wähle einen Ringhomomorphismus $\Psi : S^{-1}R \to R'$ mit $\Phi = \Psi \circ \iota$ und für $\frac{a}{b} \in S^{-1}R$ gilt

$$\Psi\left(\frac{a}{b}\right) = \Psi\left(a\frac{1}{b}\right) = \Psi(a)\Psi\left(\frac{1}{b}\right) = \Psi(a)\Psi(b)^{-1} = (\Psi \circ \iota(a)) \cdot (\Psi \circ \iota(b))^{-1} = \Phi(a)\Phi(b)^{-1} = \bar{\Phi}\left(\frac{a}{b}\right).$$

□

Aufgabe 2. Sei $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n, und $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ vollständig gekürzt und eine rationale Nullstelle von f, d.h. $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$. Zeigen Sie, dass $a \mid a_0$ und $b \mid a_n$.

Beweis. Es gilt

$$0 = f\left(\frac{a}{b}\right) = a_n\frac{a^n}{b^n} + \ldots + a_1\frac{a}{b} + a_0$$

und somit

$$a_0 b^n = -b^n \left(-a_n \frac{a^n}{b^n} + a_{n-1} \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{a}{b} \right) = a \left(-a_n a^{n-1} - a_{n-1} a^{n-2} b^1 + \ldots + a_1 b^{n-1} \right).$$

Also gilt $a \mid a_0 b^n$ und da $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, folgt $a \mid a_0$.
Für die fehlende Behauptung betrachte folgendes

$$0 = b^n f\left(\frac{a}{b}\right) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \ldots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n$$

und letzteres impliziert

$$a_n a^n = -b \left(a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} b + \ldots + a_1 a b^{n-2} + a_0 b^{n-1} \right).$$

Also gilt $b \mid a_n a^n$ und da $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, folgt $b \mid a_n$. □

Aufgabe 3. Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^3 + X - 3$.

1. Ist f irreduzibel, betrachtet als Element von $\mathbb{Z}[X]$
2. Ist f irreduzibel, betrachtet als Element von $\mathbb{F}_5[X]$

Beweis. Zunächst beweisen wir das folgende Lemma

Lemma 0.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[X]$ mit $1 < deg(f) \leq 3$, so ist f genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt.*

Beweis. Besitzt f eine Nullstelle $a \in \mathbb{K}$, so liefert 'Teilen mit Rest' im euklidischen Ring $\mathbb{K}[X]$ für $g, r \in \mathbb{K}[X]$

$$f(X) = g(X)(X - a) + r(X),$$

mit $\deg(r) < \deg(X - a) = 1$. Also ist r ein konstantes Polynom, es gilt $r(X) = f(X)(X - a) - g(X)$ und wegen $r(a) = f(a) - g(a)(a - a) = 0$ ist $r = 0$, d.h. f ist reduzibel.
Sei $0 \neq f = gh$ mit $g, h \in \mathbb{K}[X]$. Da $\mathbb{K}[X]$ ein Integritätsbereich ist, gilt $3 \geq \deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$ und somit kann nur $\deg(g) = 0, 1, 2, 3$ gelten. Ist $\deg(f) = 3$, so sind die Möglichkeiten $\deg(g) = 1$ und $\deg(g) = 2$ ausgeschlossen, da f keine Nullstellen besitzt. Ist $\deg(f) \leq 2$, so kann nur $\deg(g) = 2$ und $\deg(g) = 0$ gelten. Also ist g oder h konstant und dementsprechend invertierbar, d.h. f ist irreduzibel. □

1. Betrachte f in $\mathbb{Q}[X]$. Jede rationale Nullstelle $\frac{a}{b}$, wobei $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist, erfüllt nach Aufgabe 2 die folgenden Bedingungen $a \mid a_0 = -3$ und $b \mid a_n = 1$. Wir können o.E. annehmen, dass $b = 1$ ist, also ist die Nullstelle $-1, -3, 1$ oder 3. Aber keine der genannten Zahlen ist eine Nullstelle von f, d.h. f besitzt in $\mathbb{Q}$ keine Nullstellen und somit auch keine in $\mathbb{Z}$. Nun liefert das vorherige Lemma die Irreduzibilität von f.

2. Es gilt $f(4) = 4^3 + 4 - 3 = 0$ in $\mathbb{F}_5$, also besitzt f eine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$ und ist nach vorherigem Lemma reduzibel. Konkret liefert eine Polynomdivision

$$f(X) = X^3 + X - 3 = X^3 + X + 2 = (X^2 + 4X + 2)(X + 1).$$

□

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass ein Polynomring $R[X]$ genau dann ein Hauptidealring ist, wenn R ein Körper ist.

Beweis. Ist R ein Körper, so ist, so ist $R[X]$ euklidisch und somit ein Hauptidealring. Sei andersherum $R[X]$ ein Hauptidealring, so betrachte $(X) \trianglelefteq R[X]$. Das Ideal (X) ist ein Primideal, denn (X) ist der Kern des Auswertungshomomorphismus

$$\phi_0 : R[X] \to R,\ f \mapsto f(0)$$

und mit $fg \in \ker(\phi_0)$ und da R ein Integrirätsbereich ist, folgt $f \in \ker(\phi_0)$ oder $g \in \ker(\phi_0)$. Da $R[X]$ ein Hauptidealring ist, ist (X) maximal und somit ist $R[X]/(X) \cong R$ ein Körper. □