Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (a) Es sei A eine monomiale Matrix und $C, C' \subseteq K^n$ Codes, sodass $CA = C'$ gilt. Zeigen Sie, dass C und C' äquivalente Codes sind.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Hammingcodes in K^n der Dimension $n-k$ äquivalent sind.

Beweis. (a) Jede monomiale Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist Produkt einer Permutationsmatrix P_π mit $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ und Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mit $\prod_{i=1}^n a_i \neq 0$

$$A = D \cdot P_\pi.$$

(Mit anderen Worten monomiale Matrizen multipliziert die Einträge der Vektoren mit Elementen ungleich Null und permutiert diese.) Also gilt

$$\det(A) = \det(D) \cdot \det(P_\pi) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_i \neq 0$$

und daraus folgt, dass A den Code C bijektiv auf C' abbildet.

Für alle $v \in K^n$ gilt offensichtlich $\mathrm{wt}(v^t) = \mathrm{wt}(v^t D)$ und $\mathrm{wt}(v^t) = \mathrm{wt}(v^t P_\pi)$. Also ist A, wegen

$$\mathrm{wt}(cA) = \mathrm{wt}(cD \cdot P_\pi) = \mathrm{wt}(cD) = \mathrm{wt}(c)$$

für alle $c \in C$, gewichtserhaltend.

(b) Seien $H = (h_1, \dots, h_n) \in K^{k\times n}$ und $H' = (h_1', \dots, h_n') \in K^{k\times n}$ Kontrollmatrizen zweier Hammingcodes der Dimension $n-k$. Dann sind die n verschiedenen eindimensionalen Unterräume von K^k gerade

$$\{\langle h_1\rangle_K, \dots, \langle h_n\rangle_K\} = \{\langle h_1'\rangle_K, \dots, \langle h_n'\rangle_K\}.$$

Also existiert eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $\langle h_{\pi(i)}\rangle_K = \langle h_i'\rangle$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $a_i \in K^\times$ mit $a_i h_i = h'_{\pi^{-1}(i)}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Definiere $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$, die Permutationsmatrix P_π zu π und $A = D \cdot P_\pi$. Damit gilt

$$H \cdot A = H \cdot D \cdot P_\pi = H'$$

und damit folgt

$$C'^t = \{c'^t \mid c' \in C'\} = \mathrm{Kern}(H') = \mathrm{Kern}(HA) = A^{-1}\,\mathrm{Kern}(H) = A^{-1}\{c^t \mid c \in C\} = A^{-1}C^t = \left(C(A^{-1})^t\right)^t.$$

Da $(A^{-1})^t$ eine monomiale Matrix ist, sind C und C' nach Teilaufgabe (a) äquivalent.

□

Aufgabe 2. Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, $\mathrm{Ch}(A)$ die Menge der Charaktere von A und $\chi \in \mathrm{Ch}(A)$. Zeigen Sie

(a) $\chi(0) = 1$,

(b) $\chi(a)^{|A|} = 1$ für alle $a \in A$ und

(c) $\overline{\chi}(a) = \chi(-a)$ für alle $a \in A$.

Beweis. (a) Charaktere sind Gruppenhomomorphismen.

(b) Sei $a \in A$. Da A endlich ist, gilt nach Lagrange $\mathrm{ord}(a) \mid |A|$, d.h. insbesondere $|A| \cdot a = 0$. Wir erhalten somit mit Teilaufgabe (a)

$$\chi(a)^{|A|} = \chi(|A| \cdot a) = \chi(0) = 1.$$

(c) Aus Teilaufgabe (b) folgt, dass $\chi(a)$ eine $|A|$-te Einheitswurzel ist. Dadurch erhalten wir für alle $a \in A$

$$\overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)} = \chi(a)^{-1} = \chi(-a).$$

□

Aufgabe 3. Es sei $n \geq 2$ und $\varepsilon \neq 1$ eine n-te primitive komplexe Einheitswurzel. Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i = 0.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i$, was direkt die Aussage impliziert. □

Aufgabe 4. Es sei A eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass $\chi, \psi \in \mathrm{Ch}(A)$ gilt

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 1 & , \ \chi = \psi \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Das hermitesche Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ ist für Charaktere $\chi, \psi \in \mathrm{Ch}(A)$ wie folgt definiert

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \varphi(a) \overline{\psi(a)}.$$

Ferner gilt

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \varphi \overline{\psi}, 1_A \rangle.$$

Da $\overline{\psi}$ das Inverse von ψ in $\mathrm{Ch}(A)$ ist, reicht es

$$\langle \chi, 1_A \rangle = \begin{cases} 1 & , \ \chi = 1_A \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$

zu zeigen. Offensichtlich ist $\langle \chi, 1_A \rangle = 1$ für $\chi = 1_A$. Sei nun $\chi \neq 1_A$. Wähle ein $b \in A$ mit $\chi(b) \neq 1$. Wegen

$$\chi(b) \sum_{a \in A} \chi(a) = \sum_{a \in A} \chi(a + b) = \sum_{a \in A} \chi(a)$$

erhalten wir $\sum_{a \in A} \chi(a) = 0$. also $\langle \chi, 1_A \rangle = 0$. □