Lineare Algebra II
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 18.3 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $P \in \mathbb{K}[X]$.

a) Behauptung: Es gibt im Polynomring $\mathbb{K}[X,Y]$ eine Taylorentwicklung

$$P(X+Y) = P(X) + \sum_n \Phi_n(X) Y^n$$

mit $\Phi_n(X) \in \mathbb{K}[X]$.

Beweis. Sei $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, so gilt mit $\binom{i}{k} := 0,\ \forall k > i$:

$$\begin{aligned} P(X+Y) = \sum_{i=0}^m a_i (X+Y)^i &= \sum_{i=0}^m a_i \Big(\sum_{k=0}^i \binom{n}{k} X^k Y^{i-k} \Big) \\ &= \sum_{0 \le i,k \le m} a_i \binom{i}{k} X^k Y^{i-k} \\ &= \sum_{0 \le i,k \le m; i=k} a_i \binom{i}{k} X^k Y^{i-k} + \sum_{0 \le i,k \le m; i \neq k} a_i \binom{i}{k} X^k Y^{i-k} \\ &= \sum_{i=0}^m a_i X^i + \sum_{0 \le i,k \le m; i \neq k} a_i \binom{i}{k} X^k Y^{i-k} \end{aligned}$$

Mit $\Phi_n(X) := \sum_{i=n}^m a_i \binom{i}{i-n} X^{i-n}$ gilt nun:

$$P(X+Y) = P(X) + \sum_{n=1}^m \big(\sum_{i=0}^m a_i X^{i-n} \big) Y^n = P(X) + \sum_{n=1}^m \Phi_n(X) Y^n$$

□

b) Behauptung: Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, so gilt $\Phi_n(X) = \frac{1}{n!} \big(\frac{d}{\mathrm{dx}} \big)^n P(X)$

Beweis. Sei Œ $P(X) = X^m$.

$$\begin{aligned} P(X+Y) = (X+Y)^m &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} X^{m-n} Y^n \\ &= P(X) + \sum_{n=1}^m \binom{m}{n} X^{m-n} Y^n \\ &= P(X) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \frac{m!}{(m-n)!} X^{m-n} Y^n \\ &= P(X) + \sum_{n=1}^m \underbrace{\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dX} \right)^n X^m}_{\Phi_n(X)} Y^n \end{aligned}$$

□