Lineare Algebra II
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 21.5 b) Sei A eine invertierbare komplexe Matrix.
Behauptung: Die Jordanblöcke $J_n(\lambda)$ von A sind ähnlich zu den Jordanblöcken $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ von A^{-1}.

Beweis. Sei $v \in$Eig(A, λ), wobei λ ein Eigenwert von A ist, wobei die Eigenwerte alle von 0 verschieden sind, da A injektiv ist. So ist v nach der folgenden Rechnung ein Eigenwert von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned} & v = A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v \\ \Leftrightarrow & v \in \mathrm{Eig}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung zerfällt V in eine direkte Summe von zyklischen Summanden

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$

mit $n_i := \dim V_i$ und $r \in \mathbb{N}$.
Sei nun (V_i, A) so ein zyklischer Summand mit v $A-$zyklischen Vektor, so ist

$$B := \{v, (A-\lambda)v, ..., (A-\lambda)^{n_i-1}v\}$$

eine Basis von V_i bzgl. derer die Darstellungsmatrix von $A_{|V_i}$ die Jordangestalt $J_{n_i}(\lambda)$ hat.
Die Idee ist nun zu zeigen, dass (V_i, A^{-1}) zyklisch mit Basis

$$\tilde{B} = \{v, \left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)v, ..., \left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)^{n_i-1}v\}$$

ist.
Sei $\chi_{A_{|V_i}}(X) = X^{n_i} + a_1X^{n_i-1} + ... + a_{n_i}$ das charakteristische Polynom von $A|_{V_i}$ mit $a_{n_i} = \det(A) \neq 0$, so ist A^{-1} darstellbar durch Linearkombination der Potenzen von A. Es gilt also

$$\begin{aligned} & A^{-1}v = -\frac{1}{a_{n_i}}\left(A^{n_i-1} + a_1A^{n_i-2} + ... + a_{n_i-1}Id\right)v \in V_i \\ \Rightarrow & A^{-1}\left(A-\lambda\right)^k v \in V_i \ \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. A^{-1} ist V_i invariant.
Betrachte nun die Menge $\tilde{B}$ etwas genauer. Sie ist ein System linear unabhängiger Vektoren, bildet also eine Basis von V_i, da

$$(\lambda A)^k\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)^k v = \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(A^{-1}\right)^{k-i}(-\lambda)^i\right)v = \left(A - \lambda Id\right)^k v \begin{cases} = 0 & k \geq n_i \\ \neq 0 & k < n_i \end{cases}.$$

Also ist (V_i, A^{-1}) zyklisch mit v $A^{-1}-$zyklischen Vektor und die Darstellungsmatrix von $A^{-1}_{|V_i}$ bzgl. der Basis $\tilde{B}$ ist der Jordanblock $J_{n_i}(\frac{1}{\lambda})$. □

Aufgabe 21.2) Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(X) = (X+2)^2(X^2-2X+2)^2 = (X+2)^2(X-(1+i))^2(X-(1-i))^2.$$

1. Es gilt

$$Eig(A, -2) = \ker(A + 2Id) =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} > .$$

Die *geometrische Vielfachheit* ist 1, d.h. es gibt genau einen Jordanblock zum Eigenwert -2, der die Größe 2 hat. In anderen Worten bedeutet dies, dass $\ker(A+2Id)$ ein zyklischer Untervektorraum von $\mathbb{C}^6$ ist. Um eine entsprechende Jordanbasis von $\ker(A+2Id)$ zu erhalten, wähle beispielsweise den Vektor

$$v_2 := e_5 \in \ker(A+2Id)^2 \setminus \ker(A+2Id)$$

und setze

$$v_1 := (A+2Id)v_2 = 2\cdot e_5 + 4\cdot e_6$$

und erhalte so eine Basis.
Verfahre analog mit den anderen Eigenwerten.

2. Es gilt

$$Eig(A, 1+i) = \ker(A-(1+i)Id) =< \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ i\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Also gibt es hier auch genau einen Jordanblock der Größe 2 und $\ker(A-(1+i)Id)$ ist zyklisch.

Sei $v_4 := \begin{pmatrix} 11-23i\\ -23-11i\\ 0\\ 23+11i\\ -21-i\\ 26 \end{pmatrix} \in \ker(A-(1+i)Id)^2 \setminus \ker(A-(1+i)Id)$ und $v_3 := (A-(1+i)Id)v_4$.

3. Es gilt

$$Eig(A, 1-i) = \ker(A-(1-i)Id) =< \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -i\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Also gibt es hier auch genau einen Jordanblock der Größe 2 und $\ker(A-(1-i)Id)$ ist zyklisch.

Sei $v_6 := \begin{pmatrix} 11+23i\\ -23+11i\\ 0\\ 23-11i\\ -21+i\\ 26 \end{pmatrix} \in \ker(A-(1-i)Id)^2 \setminus \ker(A-(1-i)Id)$ und $v_5 := (A-(1+i)Id)v_4$.

Die Transformationmatrix lautet nun

$$S := \begin{pmatrix} v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|v_6 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörige Jordanmatrix ist

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & \\ 1 & -2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1+i & \\ 1 & 1+i \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1-i & \\ 1 & 1-i \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Die *allgemeine Normalform* über $\mathbb{R}$ lautet

$$\begin{pmatrix} \boxed{B(X+2)} & & \\ & \boxed{B(X^2-2X+2)} & \\ & O_1 & \boxed{B(X^2-2X+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 0 & -2 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$