Lineare Algebra II
Lösungen zur Klausur aus 2007
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 Es sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines unitären Raumes mit $< f(v), v >= 0$ für alle $v \in V$. Man zeige, dass dann gilt $f = 0$. Man gebe ein Gegenbeispiel für den Fall eines euklidischen Raumes an.

Beweis. Betrachte die folgenden Endomorphismen

$$\phi := f + f^*$$
$$\psi := f - f^*$$

Es gilt für ϕ und analog für ψ

$$< \phi(v), v >=< f(v), v > + < f^*(v), v >=< v, f(v) >= \overline{< f(v), v >} = 0 \quad \forall v \in V.$$

ϕ, ψ sind offensichtlich normal, d.h. sie besitzen eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren und für einen beliebigen Eigenvektor v zum Eigenwert λ gilt mit der obigen Gleichung

$$0 =< \phi(v), v >= \lambda^* < v, v > \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Also besitzen die Endomorphismen ψ, ϕ nur den Eigenwert 0, d.h. $V = \mathrm{Eig}(\phi, 0) = \ker(\phi)$ und somit ist ϕ der triviale $0-$Endomorphismus (ψ analog).
Es gilt also

$$0 = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\phi = f.$$

□

Aufgabe 2 Es sei $P \in K[t]$ das kleinste gemeinsame Vielfache zweier normierter Polynome $Q_1, Q_2 \in K[t]$. Man zeige oder widerlege: Für einen Endomorphismus f eine $K-$Vektorraumes gilt

$$\mathrm{Kern} P(f) = \mathrm{Kern} Q_1(f) + \mathrm{Kern} Q_2(f).$$

Beweis. Seien $F_1, F_2 \in K[t]$ mit $F_1 Q_1 = P = F_2 Q_2$ und aufgrund ihrer Minimalität sind sie teilerfremd, d.h. sei G ein gemeinsamer Teiler so gilt

$$\frac{F_1}{G} Q_1 = \frac{F_2}{G} Q_2,$$

also muss $G \in K$ gelten.
Sei $v \in \ker Q_i(f) = \{v \in V | Q_i(f)v = 0\}$ für $i \in \{1, 2\}$, so gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} & Q_i(f)v = 0 \\ \Rightarrow & F_i(f) \circ Q_i(f)v = P(f)v = 0 \\ \Rightarrow & \ker Q_i(f) \subseteq \ker P(f). \end{aligned}$$

Sei andersherum $v \in \ker P(f)$ und $A_1, A_2 \in K[t] : A_1 F_1 + A_2 F_2 = 1$.

$$\underbrace{A_1(f) \circ F_1(f)v}_{=:v_1} + \underbrace{A_2(f) \circ F_2(f)v}_{=:v_2} = v$$

Nun gilt für $i \in \{1, 2\}$

$$Q_i(f)v_i = Q_i(f) \circ A_i(f) \circ F_i(f)v = A_i(f) \circ \underbrace{P(f)v}_{=0} = 0$$
$$\Rightarrow v = v_1 + v_2 \in \ker Q_1(f) + \ker Q_2(f)$$

□

Aufgabe 3 Unter welchen Voraussetzungen ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.
Behauptung: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $a_k = 0 \Leftrightarrow a_{n-k+1} = 0$ gilt

Beweis. Durch eine geschickte Umsortierung der Basis, d.h. symmetrische Zeilen- und Spaltenvertauschungen, erhält man die folgenden Blockmatrizen
n gerade:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ a_n & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & a_{\frac{n}{2}} \\ & & & a_{\frac{n}{2}+1} & 0 \end{pmatrix}$$

n ungerade:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ a_n & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & a_{\frac{n-1}{2}} & \\ & & & a_{\frac{n+1}{2}+1} & 0 & \\ & & & & & a_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix}$$

Nun ist offensichtlich A genau dann diagonalisierbar, wenn jeder Block A_k diagonalisierbar ist. Nehme also ohne Einschränkung an, dass n gerade ist.
Dies führt zu der folgenden Behauptung:
$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ a_{n-k+1} & 0 \end{pmatrix}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $a_k = 0 \Leftrightarrow a_{n-k+1} = 0$ für $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ gilt.
Das charakteristische Polynom der Blöcke A_k ist der Form

$$\chi_{A_k} = X^2 - \mathrm{tr}(A_k)X + \det(A_k) = X^2 - a_k a_{n-k+1}.$$

Sei A_k diagonalisierbar und $a_k = 0$, so ist

$$\chi_{A_k} = X^2$$

und aufgrund der Diagonalisierbarkeit ist das Minimalpolynom von A_k

$$m_{A_k} = X,$$

woraus $a_{n-k+1} = 0$ folgt. Der Beweis zu $a_{n-k+1} = 0 \Rightarrow a_k = 0$ ist analog.
Sei andersherum $a_k = 0$ und $a_{n-k+1} = 0$, so ist $A_k = 0$ in diagonalgestalt.
Sei $a_k \neq 0$ und $a_{n-k+1} \neq 0$, so hat das charakteristische Polynom zwei verschiedene Nullstellen, d.h. A_k ist diagonalisierbar. □

Aufgabe 4 Man bestimme ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentialgleichung

$$f'''' + 4f'' + 4f = 0.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$P(X) = X^4 + 4X^2 + 4 = (X^2 + 2)^2 = (X - i\sqrt{2})^2 (X + i\sqrt{2})^2.$$

Somit bilden nach Vorlesung die folgenden Funktionen ein komplexes Fundamentalsystem

$$\exp(i\sqrt{2}t), t\exp(i\sqrt{2}t), \exp(-i\sqrt{2}t), t\exp(-i\sqrt{2}t).$$

Damit erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem

$$\cos(\sqrt{2}t), \sin(\sqrt{2}t), t\cos(\sqrt{2}t), t\sin(\sqrt{2}t).$$

Aufgabe 5 Bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 sei dem Endomorphismus f des $\mathbb{C}^4$ die Matric

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Man bestimme die Jordansche Normalform J von A und eine Transformationsmatrix T mit $T^{-1}AT = J$.
Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $(1-t)^4$.
Mittels einer einfachen Rechnung erhält man

$$\text{Eig(A,1)} = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} >,$$

d.h. die algebraische Vielfachheit ist zwei, somit besitzt die Jordanmatrix genau zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 1.
Berechne nun die Kette

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq W_4 \subseteq ...,$$

mit $W_0 := \{0\}, W_i := \ker(A - Id)^i$ für $i > 0$.

$$W_0 = \{0\} \subseteq W_1 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} > \subseteq W_2 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \subseteq W_3 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Diese wird ab $i = 3$ stationär, somit ist das Minimalpolynom vom Grad 3 und der größte Jordanblock hat Format drei.
Die Jordansche Normalform von A ist somit von der folgenden Gestalt

$$J := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Jordanbasis des ersten Blocks berechnet man wie folgt

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3 \setminus W_2$$

$$v_2 := (A - Id)v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 := (A - Id)v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den letzten Block ergänze v_1, v_2, v_3 mit Hilfe eines Eigenvektors zu einer Basis. Wähle also beispielsweise

$$v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bildet

$$T := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

eine gesuchte Transformationsmatrix.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix P, sodass $P^t AP$ diagonal ist.
A ist symmetrisch, also normal. Es gibt eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren (im $\mathbb{R}^4$). Im folgenden werden die Eigenräume berechnet, eine Basis aus diesen gewählt und anschließend diese mittels *Gram-Schmidt Verfahren* orthonormalisiert.
Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(X) = (X+1)^3(X-3)$$

und die Eigenräume

$$\mathrm{Eig}(A,-1) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$\mathrm{Eig}(A,3) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Da A symmetrisch ist, stehen die Eigenräume orthogonal zueinander und es ist Orthonormalisierungsverfahren lediglich auf die Vektoren des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(A,-1)$ anzuwenden.

Offensichtlich sind die Vektoren $w_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander, sodass die folgende Rechnung ausreichend ist

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit bildet

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ON-Basis aus Eigenvektoren. Definiere nun

$$P := \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} .$$