Lineare Algebra II: Präsenzübung 2
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 Betrachte den Hilbertraum $(\mathbb{R}^4, <-,->_2)$, wobei $<-,->_2$ das Standardskalarprodukt ist. Sei

$$U :=< \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} > \text{ ein Unterraum und}$$

$$h := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Berechne die Hessesche Normalform der affinen Hyperebene $H = h + U$ (und denke über das Ergebnis nach).

Aufgabe 2 Sei V ein endlich-dimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $<-,->$ und $f \in \mathrm{End}(V)$.

a) Beweise: f ist genau dann eine Isometrie, wenn f Orthogonalbasen auf Orthogonalbasen abbildet.

b) Beweise: Ist A die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer Orthonormalbasis. f ist genau dann eine Isometrie, wenn $\overline{A}^t A = Id$.

c) Sei $V := P_3 = \{f \in \mathbb{R} | deg(f) < 3\}$ ein Vektorraum und $< f, g >:= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf V. Überprüfe, ob $\frac{d}{dx} : V \to V$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 3 Sei V ein drei dimensionale Vektorraum über $\mathbb{K}$, $A := \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{K})$ eine symmetrische Matrix.
Zeige, dass A die Signatur $(r^+, r^-, r_0) = (2, 1, 0)$ hat und finde eine Transformationsmatrix T mit $T^t AT = Id_3$. Warum ist die von A erzeugte Billinearform b nicht positiv definit? Gebe eine Orthogonalbasis bzgl. b an.