Lineare Algebra II: Präsenzübung 3
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 Sei V ein unitärer endlich dimensionaler Vektorraum und $A \in$End(V). Zeige:

a) Es gilt $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$, wobei $\frac{1}{2}(A + A^*)$ und $\frac{1}{2i}(A - A^*)$ hermitesch sind.

b) Ist $A = H_1 + iH_2$ mit H_1, H_2 hermitesch, so gilt

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ und } H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

c) Ist $A = H_1 + iH_2$ mit H_1, H_2 hermitesch, so gilt A ist genau dann normal, wenn $H_1H_2 = H_2H_1$.

d) Sind H_1, H_2 hermitesch mit $H_1H_2 = H_2H_1$, so sind H_1, H_2 simultan diagonalisierbar.

Aufgabe 2

a) Zeige: $\det(A) = \pm 1\ \forall A \in O(n) = \{A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R}) | A^tA = Id\}$.

b) Zeige: 1 ist ein Eigenwert von A für alle $A \in SO(n) = \{A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R}) | A^tA = Id, \det(A) = 1\}$.

c) Sei $A := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \in SO(n) = \{A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R}) | A^tA = Id,\ \det(A) = 1\}$, also eine Rotationsmatrix im $\mathbb{R}^3$. Finde die Rotationsachse und den Rotationswinkel von A.