

Lineare Algebra II: Präsenzübung 4
-Sophiane Yahiatene-

Sei R ein Ring.

Definition: Eine Menge $I \subseteq R$ heißt linksseitiges Ideal, wenn folgende Eigenschaften gelten:

1. I ist eine additive Gruppe
2. Für alle $a \in R$ gilt $a \cdot I \subseteq I$

Bemerkung: In der Sprache der Linksmoduln bedeutet dies, dass I ein Untermodul von R ist, wobei R als R -Modul aufgefasst wird.

Aufgabe 1 Sei R ein unitärer Ring, d.h. ein Ring mit 1 Element und sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeige:
 $I = R \iff 1 \in I$.

Aufgabe 2 Sei $R = \mathbb{Z}$.

1. Zeige, dass die Ideale $(2) := 2\mathbb{Z}$, $(3) := 3\mathbb{Z}$ und $(5) := 5\mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd sind.
2. Gebe mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an.
3. Wie lautet ϕ^{-1} ?
4. Löse das System:

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{2} \\x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 4 \pmod{5}\end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 3 Berechne den größten gemeinsamen Teiler G der folgenden Polynome

$$\begin{aligned}P_1(x) &= x^3 - x^2 + x - 1 \\P_2(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

in $\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 4 Zeige, dass $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{R}[i] := \{f(i) | f \in \mathbb{R}[X]\}$. Also ist $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$.
(Tipp: Betrachte die surjektive Auswertungsabbildung $ev_i : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[i]$; $f \mapsto f(i)$ und $\ker(ev_i) = (X^2 + 1)$ ist ein Ideal)