

Lineare Algebra II: Präsenzübung 5
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 (Nachtrag) Sei R ein kommutativer unitärer Ring und $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise teilerfremde Ideale. Zeige: $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$.

Aufgabe 2

- a) Sei R ein Integritätsring mit 1 und $a \in R$. Zeige: Ist (a) ein Primideal, so ist a irreduzibel.
- b) Sei R ein Hauptidealring und $a \in R$. Zeige: Ist a irreduzibel, so ist (a) prim.

Bemerkung:

Jedes Primideal in $\mathbb{K}[X]$ wird von genau einem irreduziblen Polynom erzeugt.

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a \in \mathbb{K}$. Das normierte Polynom $m_a \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(m_a)$ minimal und $m_a(a) = 0$ heißt das Minimalpolynom von a .
(Die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimalpolynoms wird in Aufgabe 3 bewiesen)

Aufgabe 3 Sei $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{R}$ ein Körper und fasse ihn als $\mathbb{R}$ -Vektorraum auf.

- a) Zeige, dass $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension zwei ist.
- b) Ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) = n$ ($n \in \mathbb{N}$), so zeige die folgenden Aussagen:
 - i) Jedes $a \in \mathbb{K}$ besitzt genau ein Minimalpolynom $m_a \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(m_a) \leq n$.
 - ii) Sei $a \in \mathbb{K}$ mit Minimalpolynom m_a vom Grad zwei. Gebe eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{R}[X]/(m_a)$ an und folgere $\mathbb{R}[X]/(m_a) \cong \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

Tipps zu 3b):

- i) Betrachte die Menge $I := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(a) = 0\}$ und zeige, dass I ein Ideal ist.
- ii) Betrachte den Grad der Erzeuger der Nebenklassen von $\mathbb{K}[X]/(m_a)$.