Lineare Algebra II
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 13.1 Es seien f_{ij} differenzierbare Funktionen in einer Variablen x.

$$D_i = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & ... & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & ... & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & ... & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) f'_{i\sigma(i)}(x) \prod_{k=1, k\neq i}^{n} f_{k\sigma(k)}(x) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(f_{ij}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n} &= \frac{d}{dx} \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) \prod_{k=1}^{n} f_{k\sigma(k)}(x) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^{n} f_{k\sigma(k)}(x) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) \sum_{i=1}^{n} f'_{i\sigma(i)}(x) \prod_{k=1, k\neq i}^{n} f_{k\sigma(k)}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) f'_{i\sigma(i)}(x) \prod_{k=1, k\neq i}^{n} f_{k\sigma(k)}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_i \end{aligned}$$

Aufgabe 13.2 Sei $V = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine geordnete Basis des Vektorraums $Mat_K(2,2)$ mit $char(K) \neq 2$ und $adU : Mat_K(2,2) \to Mat_K(2,2);\ X \mapsto [U,X] := UX - XU$ eine lineare Abbildung, so berechnet sich die Darstellungsmatrix bzgl. V folgendermaßen:

$$\begin{aligned} adU(I) &= UI - IU = 0 \cdot I + 0 \cdot H + 0 \cdot U + 0 \cdot L \\ adU(H) &= UH - HU = 0 \cdot I + 0 \cdot H + (-2) \cdot U + 0 \cdot L \\ adU(U) &= UU - UU = 0 \cdot I + 0 \cdot H + 0 \cdot U + 0 \cdot L \\ adU(L) &= UL - LU = 0 \cdot I + 1 \cdot H + 0 \cdot U + 0 \cdot L \end{aligned}$$

dementsprechend lautet die Darstellungsmatrix

$$M_V^V(adU) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.3 Seine U,V endlich dimensionale Vektorräume über dem Körper K und $b : U \times V \to K$ eine bilineare Abbildung. Bezeichne $l_b(u) := b(u, \cdot)$ und $r_b(v) := b(\cdot, v)$, d.h. $l_b : U \to V^*$; $u \mapsto l_b(u)$ und $r_b : V \to U^*$; $u \mapsto r_b(v)$ sind linear.
Seien $\mathcal{U} = \{u_1, ..., u_n\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_m\}$, $\mathcal{U}^* = \{u_1^*, ..., u_n^*\}$ und $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, ..., v_m^*\}$ Basen von U, V, U^*, V^*, wobei $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ und $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.
Seien $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in U$ und $y = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i \in V$, so gilt

$$b(x, y) = \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le m} \lambda_i \mu_j b(u_i, v_j).$$

Also beschreibt $B = \big(b(u_i, v_j)\big)_{1 \le i \le n; 1 \le j \le m}$ mit

$$b(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^t B \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

die Bilinearform bzgl. der Basen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$.

1. <u>Behauptung</u>: B ist die Darstellungsmatrix von r_b bzgl. $\mathcal{V}, \mathcal{U}^*$

   Beweis.

   $$r_b(v_j) = B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (b_{ij})_{1 \le i \le n} = \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i^* \in \mathcal{U}^* \ \forall 1 \le j \le m,$$

   wobei der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ an der j-ten Stelle eine Eins und sonst nur Null stehen hat.
   Der Vektor $(b_{ij})_{1 \le i \le n}$ bildet also die j-te Spalte der Darstellungsmatrix, sodass $M_{\mathcal{U}^*}^{\mathcal{V}}(r_b) = B$ gilt. □

2. <u>Behauptung</u>: B^t ist die Darstellungsmatrix von l_b bzgl. $\mathcal{U}, \mathcal{V}^*$

   Beweis.

   $$l_b(u_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t B = B^t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (b_{ji})_{1 \le i \le n} = \sum_{i=1}^m b_{ji} v_i^* \in \mathcal{V}^* \ \forall 1 \le j \le m,$$

   woraus mit analoger Begründung $M_{\mathcal{V}^*}^{\mathcal{U}}(l_b) = B^t$ folgt. □

<u>Behauptung</u>: b ist regulär $\Leftrightarrow r_b, l_b$ injektiv

Beweis. Wenn b regulär ist, so ist B nach Definition invertierbar, sodass $r_b = B$ und $l_b = B^t$ invertierbar sind, also insbesondere injektiv.
Sind andersherum l_b, r_b injektiv, so gilt unter anderem nach der Dimensionsformel $dim(\mathcal{U}^*) = dim(U) = rk(l_b) = rk(B) = rk(B^t) = rk(r_b) = dim(V) = dim(\mathcal{V}^*)$, d.h. B, B^t sind quadratische Matrizen. Außerdem sind sie injektiv, also auch surjektiv. □

Aufgabe 13.4 Sei $Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$ der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen und es sei $q(A) := tr(AA^t)$ für $A \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$.

$$\begin{aligned} q(A+B) - q(A) - q(B) &= tr(AA^t + AB^t + BA^t + BB^t) - tr(AA^t) - tr(BB^t) \\ &= tr(AA^t) + tr(AB^t) + tr(BA^t) + tr(BB^t) - tr(AA^t) - tr(BB^t) \\ &= tr(AB^t) + tr(AB^t) \\ &= 2tr(AB^t) \end{aligned}$$

Dementsprechend ist $b(A,B) := q(A+B) - q(A) - q(B) = 2tr(AB^t)$ billinear und offensichtlich gilt auch $q(\lambda A) = \lambda^2 q(A)$. Also ist q eine quadratische Form.

q ist positiv definit, da für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ gilt

$$0 = q(A) = tr(AA^t) = tr\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\big)_{1\leq i,j\leq n}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\big) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$$

Aufgabe 13.5 Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2 und $q(x_1,...,x_n) = \sum_{i\leq j} a_{ij}x_ix_j$ eine quadratische Form auf K^n.
Benutze Satz 18.2, um q in folgende Gestalt zu bringen $q(y_1,...,y_n) = \sum_{i=1}^n b_i y_i^2$. Betrachte allgemein das folgende Vorgehen:

Sei b die von q erzeugte Billinearform.

1. Wenn $q \equiv 0$, so ist q bereits in der obigen Form, also nehme an $q \neq 0$.
   So existiert ein $u \in K^n$, sodass $q(u) \neq 0$ und setze $U :=< u >$.
2. Ist $q_{|_{U^\perp}} \equiv 0$, so ergänze die $\{u\}$ einfach zu einer Basis von V. Ist $q_{|_{U^\perp}} \neq 0$, so führe Schritt 1. für $U^\perp$ durch.
   Induktiv erhält man also eine Basis $\{u_1,...,u_n\}$, sodass $V =< u_1 >\perp ... \perp< u_n >$ gilt.

Für diese Basis hat q die gewünschte Form.

1. $q(x,y)^t = xy = (xy)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine quadratische Form in K^2.
   Sei $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_1) = 1$.
   Sei $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_2) = -1$, $b(u_1,u_2) = 0$.
   Somit ist
   $$K^2 =< u_1 >\perp< u_2 >$$
   und in dieser Basis hat die symmetrische Billinearform b die Gram'sche Matrix
   $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   und die Koordinatentransformationsmatrix lautet
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   und die neuen Koordinatenachsen $\xi := \mathbb{R}\cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot u_1$, $\eta := \mathbb{R}\cdot T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot u_2$.
   Die quadratische Form in den neuen Koordinaten lautet $q'(y_1,y_2)^t = y_1^2 - y_2^2$.

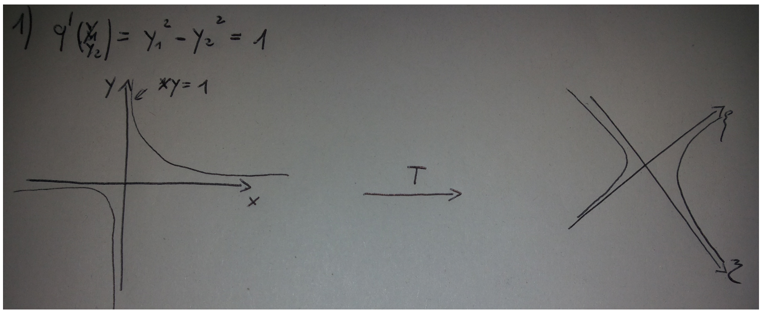

Abbildung 1

2. $q(x,y)^t = 2x^2 - 2xy + y^2 = (xy)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine quadratische Form in K^2.
   Sei $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_1) = 1$.
   Sei $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_2) = 1$, $b(u_1, u_2) = 0$.
   Somit ist

   $$K^2 = < u_1 > \perp < u_2 >$$

   und in dieser Basis hat die symmetrische Billinearform b die Gram'sche Matrix

   $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   und die Koordinatentransformationsmatrix lautet

   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   und die neuen Koordinatenachsen $\xi := \mathbb{R}u_1,\ \eta := \mathbb{R}u_2$.
   Die quadratische Form in den neuen Koordinaten lautet $q'(y_1, y_2)^t = y_1^2 + y_2^2$.

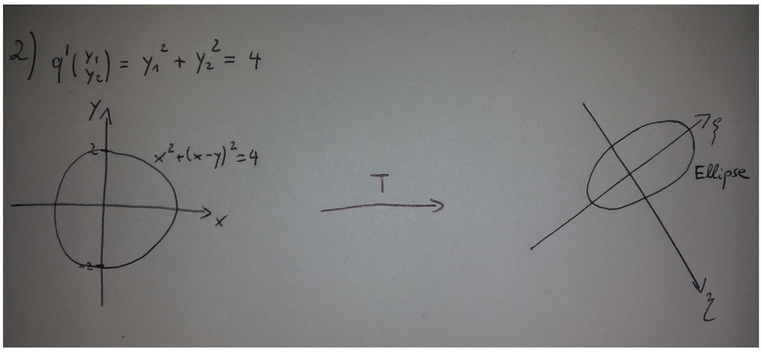

Abbildung 2

3. $q(x,y)^t = x^2 - 4xy + 4y^2 = (xy)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine quadratische Form in K^2.
   Sei $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_1) = 1$.
   Sei $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und es gilt $q(u_2) = 0$, $b(u_1, u_2) = 0$.
   Somit ist

   $$K^2 = < u_1 > \perp < u_2 >$$

   und in dieser Basis hat die symmetrische Billinearform b die Gram'sche Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Koordinatentransformationsmatrix lautet

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die neuen Koordinatenachsen $\xi := \mathbb{R}u_1,\ \eta := \mathbb{R}u_2$.
Die quadratische Form in den neuen Koordinaten lautet $q'(y_1, y_2)^t = y_1^2$.

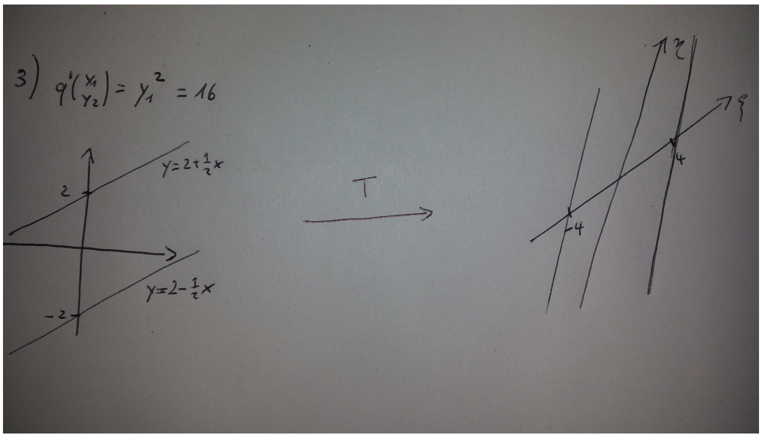

Abbildung 3