Lineare Algebra II
-Tim Schulze und Sophiane Yahiatene-

Lemma 1. *Sei M ein freier R-Modul über einem Hauptidealring und $A \in End(M)$, so liefert der Elementarteilersatz Basen X und $Y := \{y_1, ..., y_n\}$ bzgl. derer der Endomorphismus A in Elementarteilergestalt ist, d.h.*

$$A = diag(a_1, ..., a_n) \text{ mit } (a_i) \subseteq (a_j) \text{ für alle } i \geq j.$$

Dementsprechend ist $\{a_1 y_1, ..., a_m y_m\}$ eine Basis von $Im(A)$, wobei $a_j \neq 0$ für $j \leq m$ und $a_j = 0$ für $m < j \leq n$. Betrachte den surjektiven R-Homomorphismus

$$\psi : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/(a_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} r_i y_i \longmapsto \big(r_i + (a_i)\big)_{i=1,\dots,n}$$

Da $ker(\psi) = Im(A)$ gilt, folgt aus dem Isomorphiesatz

$$M/Im(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} < y_i + Im(A) > \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/(a_i)$$

In **Aufgabe 19.1** lässt sich *Lemma 1* direkt anwenden, jedoch wird dieses aus didaktischen Gründen erst in **Aufgabe 19.2** benutzt.

Aufgabe 19.1 Berechne den Kokern der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$, welcher durch die folgenden Matrizen beschrieben wird:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Unter Benutzung des *Elementarteilersatzes* wird zunächst im folgenden eine Basis des Bildes von ϕ berechnet.

i) Betrachte die folgenden Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$$

Es gilt

$$A' := TAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und mit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auch

$$A = T^{-1} A' S^{-1}.$$

Die Matrix S (bzw. T) ist Produkt von Elementarmatrizen, die Spalten-(bzw. Zeilen) Umformungen von A in die Matrix A' beschreiben, d.h. $M_Y^X(\phi) = A'$ ist die Darstellungsmatrix von ϕ bzgl. der Basen

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\};\ Y := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun liefert der Elementarteilersatz eine Basis von $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} > \oplus < 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

Da Y eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^3$ ist, gilt für den Kokern

$$\mathrm{koker(A)} = \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(A) > \oplus < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(A) > \oplus < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(A) >$$

und die Ordnungen der Erzeuger lauten

$$\mathrm{Ord}\Bigg(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(A) \Bigg) = 1,$$
$$\mathrm{Ord}\Bigg(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(A) \Bigg) = 3.$$

Also existiert ein Isomorphismus

$$\mathrm{koker(A)} = \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}(A) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

ii) Analog zu i) transformieren die Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$$

die Matrix B zu der folgenden

$$B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Der 'Elementarteilersatz' liefert nun

$$\mathrm{Im}(B) =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} > \oplus < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > \oplus < -8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Analog zum Aufgabenteil i) gilt nun

$$\mathrm{koker(A)} = \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}(A) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 19.2 Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen lässt sich die Matrix folgendermaßen in Elementarteilergestalt transformieren

$$\begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 0 & P & 1 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 0 & P & 1 \\ 0 & -P^2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -P^2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} P & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} P^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun liefert *Lemma 1* den Isomorphismus

$$\mathrm{koker}(A) \cong \mathbb{K}[X]/(P^3).$$

Aufgabe 19.3 Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 17 & 13 & 29 \\ 19 & 6 & 6 \\ 2 & -7 & -23 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det(A) = \mathrm{tr}(A) = 0$$

und somit ist das charakteristische Polynom der Form

$$\chi(X) = X^3 - aX.$$

Nach *Cayley-Hamilton* gilt

$$0 = \chi(A) = A^3 - a \cdot A \Leftrightarrow A^3 = a \cdot A \tag{1}$$

Also folgt

$$\begin{pmatrix} 11730 & 8970 & 20010 \\ 13110 & 4140 & 4140 \\ 1380 & -4830 & -15870 \end{pmatrix} = A^3 = aA.$$

Betrachten des Eintrags in der zweiten Zeile und Spalte liefert die Gleichung

$$4140 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = 690.$$

Durch sukzessives Teilen mit Rest durch drei und Ausnutzen von (**??**) erhalten wir:

$$A^{100001} = \left(A^3\right)^{33333} A^2 = a^{33333}(A^3)^{11111} A^2 = \cdots = a^{50000} A.$$

Anschließend kann man alle Zahlen einsetzen.

Aufgabe 19.4 Sei $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$ ein Polynom.
Behauptung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- $\mathbb{K}[K]/(P)$ ist ein Körper
- Das Ideal (P) ist prim
- Das Polynom P ist irreduzibel

Beweis. Sei zunächst $L := \mathbb{K}[X]/(P)$ ist ein Körper, so ist L ein Integritätsbereich und somit (P) ein Primideal.
Sei nun (P) prim und $a, b \in \mathbb{K}[X] : ab = P$. Es gilt:

$$\begin{aligned} ab \in (P) &\Rightarrow a \in (P) \text{ oder } b \in (P) \\ \text{Œ } a \in (P) &\Rightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] : PQ = a \\ &\Rightarrow QPb = ab = P \\ &\Leftrightarrow P(1 - QP) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 = Qb \\ &\Rightarrow b \text{ ist eine Einheit} \end{aligned}$$

Ist P irreduzibel, so wähle ein Polynom $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus (P)$. Für Q, P gilt $\text{ggt}(P, Q) = 1$, woraus folgt, dass das von P und Q erzeugte Ideal (P, Q) der gesamte Ring ist, d.h. (P) ist maximal und $\mathbb{K}[X]/(P)$ ein Körper. □

Aufgabe 19.5

Beweis. a) Sei $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Durch 'Teilen mit Rest' erhält man

$$P(X) = (X - \lambda) \cdot Q(X) + R(X)$$

mit $\deg(R) < \deg(X - \lambda)$. Somit ist $R \in \mathbb{R}$ und

$$0 = P(\lambda) = (\lambda - \lambda) \cdot Q(\lambda) + R = R.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $P(X) = (X - \lambda) \cdot Q(X)$.
Sei $\lambda = \mu + iv \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $\overline{\lambda}$ auch eine Nullstelle von P, da

$$0 = \overline{P(\lambda)} = \overline{P}(\overline{\lambda}) = P(\overline{\lambda}).$$

Also gilt $P(X) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) \cdot Q(X) = ((X - \mu)^2 + \upsilon^2) \cdot Q(X)$.
Nach dem 'Fundamentalsatz der Algebra' zerfällt P also in Linearfaktoren der obigen Form.

b) Die Polynome

$$P(X) := ((X-\mu)^2 + \upsilon^2) \in \mathbb{R}[X]$$

aus a) sind irreduzibel, also ist $\mathbb{R}[X]/(P)$ ein Körper. Betrachte nun die surjektiven Homomorphismen ϕ_1, ϕ_2:

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(\mu + i\upsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(\mu - i\upsilon) \end{aligned}$$

Die Kerne von ϕ_1 und ϕ_2 sind Ideale und aufgrund der Irreduzibilität von P gilt

$$\ker(\phi_i) = (P),\ i \in \{1, 2\}.$$

Nun liefert der Isomorphiesatz aus der Vorlesung die gesuchten Isomorphismen.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ und betrachte die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ k &\longmapsto \alpha \cdot k \end{aligned}$$

$\tilde{\alpha}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum Homomorphismus mit trivialen Kern, dessen charakteristisches Polynom $\chi \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$ und vom Grad $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ ist. Nach $a)$ ist χ der folgenden Form

$$\chi(X) = X - \lambda \text{ oder } \chi(X) = (X-\mu)^2 + \upsilon^2$$

und somit ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) \in \{1, 2\}$.
Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist α eine Nullstelle von χ, also muss

$$\chi(X) = (X-\mu)^2 + \upsilon^2$$

gelten und dementsprechend

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{C}.$$

Wählt man das anfängliche $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist das charakteristische Polynom

$$\chi(X) = X - \alpha$$

und dementsprechend

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) = 1,$$

d.h. $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$.

$\square$