Lineare Algebra II
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 20.1 Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\Phi \in$End(V).

a) Behauptung: $I_\Phi = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(\Phi)V = 0\}$ ist ein Ideal in $\mathbb{K}[X]$

Die Aussage lässt sich elementar nachrechnen.

b) Behauptung: Das Minimalpolynom von Φ m_Φ teilt das charakteristische Polynom χ_Φ

Beweis. Nach *Cayley-Hamilton* ist $\chi_\Phi \in I_\Phi = \big(m_\Phi\big)$, woraus die Behauptung folgt. □

c) Behauptung: Jeder irreduzible Teiler des charakteristischen Polynoms χ_Φ teilt das Minimalpolynom m_Φ.

Beweis. Nach der *Weierstraß Normalform* ist V direkte Summe zyklischer Unterräume $(V_i, \Phi_i)_{1\leq i\leq r}$ mit dazugehörigen Minimalpolynomen μ_i, für die $\mu_i | \mu_{i+1}$ und $\chi_\Phi = (-1)^n \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_r$ gilt.
Sei Q ein irreduzibler Teiler des charakteristischen Polynoms, so teilt Q den Faktor μ_r. Dann ist Q auch ein Teiler von kgV$(\mu_i | 1 \leq i \leq r) = m_\Phi$. □

Aufgabe 20.2 Sei A eine Matrix.
Behauptung: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_A von A das Produkt paarweise verschiedener Linearfaktoren ist.

Beweis. Wenn A mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $a_1, ..., a_r$ diagonalisierbar ist, so gilt

$$\begin{aligned} V &= \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}(A, a_i) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - a_i Id) \\ &\Rightarrow \prod_{i=1}^r (A - a_i Id)V = 0 \\ &\Rightarrow \prod_{i=1}^r (X - a_i) \in I_A(V) = \big(m_A\big) \\ &\Rightarrow m_A | \prod_{i=1}^r (X - a_i) \end{aligned}$$

Sei nun $m_A = \prod_{i=1}^r (X - a_i)$ mit $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$, so wird im Folgenden $V = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - a_i Id)$ gezeigt.

$$\begin{aligned} \text{Sei } m_k &:= \prod_{i=1, i\neq k}^r (X - a_i) \text{ für } 1 \leq k \leq r \\ &\Rightarrow \mathrm{ggT}(m_k | 1 \leq k \leq r) = 1 \\ &\Rightarrow \exists h_k \in \mathbb{K}[X] : \sum_{k=1}^r h_k m_k = 1 \\ &\Rightarrow v = \sum_{k=1}^r h_k(A) m_k(A) v \ \forall v \in V \\ &\Rightarrow V = \sum_{k=1}^r m_k(A) V \end{aligned}$$

Außerderdem gilt

$$\begin{aligned} &0 = m_A(A)v = (A - a_k Id) m_k(A) v \ \forall v \in V, \ k \in \{1, ..., r\} \\ &\Rightarrow m_k(A) V \subseteq \ker(A - a_k Id) \\ &\Rightarrow V = \sum_{i=1}^r \ker(A - a_i Id) = \sum_{i=1}^r \mathrm{Eig}(A, a_i) \end{aligned}$$

und da der Schnitt paarweise verschiedener Eigenräume trivial ist, folgt

$$V = \bigoplus_{i}^{r} \ker(A - a_i Id).$$

$\square$

Aufgabe 20.3 Sei $N := (n_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Matrix mit $n_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$.
<u>Behauptung:</u> N ist nilpotent

Beweis.

$$\chi_N(\lambda) = \det(\lambda Id - N) = \det \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n$$

Nach *Cayley-Hamilton* gilt

$$0 = \chi_N(N) = N^n$$

$\square$

Aufgabe 20.4 Seien $V = \mathbb{K}^4$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und $A = M_{e_1,..,e_4}^{e_1,..,e_4}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Für $W \subseteq V$ definiere das Verschwindungsideal $I_\Phi(W) = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(\Phi)(W) = 0\}$.

a)

$$\begin{aligned} I_\Phi(e_1) &= \big(X - 2\big) \\ I_\Phi(e_2) &= \big(X - 2\big) \\ I_\Phi(e_3) &= \big((X - 3)^2\big) \\ I_\Phi(e_4) &= \big(X - 3\big) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I_\Phi(< e_1, e_2 >) &= \big(X - 2\big) \\ I_\Phi(< e_3, e_4 >) &= \big((X - 3)^2\big) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} I_\Phi(< e_1, e_2, e_3, e_4 >) =& I_\Phi(V) = \big(X - 2\big)\big((X - 3)^2\big) = \big((X - 2)(X - 3)^2\big) \\ \Rightarrow& m_\Phi = (X - 2)(X - 3)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 20.5 Seien V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\Phi \in$End(V), $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ und kgV$(P_1, P_2) =: H$, so gilt $\big(H\big) = \big(P_1\big) \cap \big(P_2\big)$.
<u>Behauptung:</u> $\ker(H(\Phi))$ =$\ker(P_1(\Phi))$+$\ker(P_2(\Phi))$

Beweis. Seien $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[X] : H = F_1 P_1 = F_2 P_2$, so gilt ggT$(F_1, F_2) = 1$, denn sei $G :=$ggt(F_1, F_2), so folgt

$$\begin{aligned} &\exists E_1, E_2 \in \mathbb{K}[X] : F_1 = E_2 G,\ F_2 = E_2 G \\ &\Rightarrow GE_1 P_1 = F_1 P_1 = H = F_2 P_2 = GE_2 P_2 \\ &\Rightarrow \frac{H}{G} = \frac{F_1 P_1}{G} = \frac{E_1 G P_1}{G} = E_1 P_1 \in \big(P_1\big) \cap \big(P_2\big) \\ &\Rightarrow \big(E_1 P_1\big) = \big(P_1\big) \cap \big(P_2\big) = \big(H\big) \qquad\qquad \deg(H) \geq \deg(E_1 P_1) \\ &\Rightarrow G \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow G = 1 \end{aligned}$$

Oder man argumentiert schneller.
Es gilt $\frac{F_1}{G}P_1 = \frac{F_2}{G}P_2 =kgV(P_1, P_2)$ und aufgrund der Minimalität von kgV$(P_1, P_2) = H$ gilt $G \in \mathbb{K}$.
Sei $v \in$ker$P_i(\Phi) = \{v \in V | P_i(\Phi)v = 0\}$ für $i \in \{1, 2\}$, so gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
&P_i(\Phi)v = 0 \\
\Rightarrow &F_i(\Phi) \circ P_i(\Phi)v = H(\Phi)v = 0 \\
\Rightarrow &\ker P_i(\Phi) \subseteq \ker H(\Phi).
\end{aligned}$$

Sei andersherum $v \in$ker$H(\Phi)$ und $A_1, A_2 \in \mathbb{K}[X] : A_1F_1 + A_2F_2 = 1$.

$$\underbrace{A_1(\Phi) \circ F_1(\Phi)v}_{=:v_1} + \underbrace{A_2(\Phi) \circ F_2(\Phi)v}_{=:v_2} = v$$

Nun gilt für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
P_i(\Phi)v_i = P_i(\Phi) \circ A_i(\Phi) \circ F_i(\Phi)v = A_i(\Phi) \circ \underbrace{H(\Phi)v}_{=0} = 0 \\
\Rightarrow v = v_1 + v_2 \in \ker P_1(\Phi) + \ker P_2(\Phi)
\end{aligned}$$

$\square$