Blatt 6 - Aufgabe 2

Sophiane Yahiatene

Seien v, w zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die Gerade durch v und w. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$L = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\right\}.$$

Proof: Betrachte $\tilde{L} := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} - v.$

Die Menge $\tilde{L}$ ist ein Untervektorraum, denn es gilt

1. $0 = v - v \in \tilde{L}$ und
2. $\tilde{L}$ ist wegen der Multilinearität der Determinante abgeschlossen unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Der Vektorraum $\tilde{L}$ ist 1-dimensional, denn es gilt

$$\{0\} \subsetneq \tilde{L} \subsetneq \mathbb{R}^2.$$

Die erste Inklusion folgt aus $0 \neq w - v \in \tilde{L}$. Die zweite folgt daraus, dass $\det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0$ keine leere Bedingung ist. Dies ist aus der folgenden Fallunterscheidung ersichtlich. Wenn v, w linear unabhängig sind, so erfüllt $x_1 = 0 = x_2$ nicht die Bedingung. Sind v, w linear abhängig, d.h. $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, so betrachte zunächst den Fall $v_2 \neq 0$. In diesem Fall erfüllt $x_1 = v_1, x_2 = \lambda v_2$ nicht die Bedingung. Ist $v_2 = 0$, so wähle $x_1 = 0, x_2 = 1$, so ist die Bedingung ebenso nicht erfüllt. Also ist $\tilde{L}$ ein 1-dimensionaler Vektorraum und somit ist

$$\tilde{L} + v = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

ein 1-dimensionaler affiner Vektorraum, der v, w enthält. Dies beweist die Behauptung. $\square$