Blatt 8 - Aufgabe 3

Sophiane Yahiatene

a)

Geben Sie eine $(2 \times 2)-$**Matrix an, die über keinem Körper diagonalisierbar ist.**
Betrachte die nilpotente Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $A^2 = 0$ und nehme an, dass sie diagonalisierbar ist. So existieren $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und D eine Diagonalmatrix mit $A = S^{-1}DS$.
Also ist $0 = A^2 = S^{-1}D^2S$ und somit $0 = D^2$. Aus letzterem folgt, dass $D = 0$ ist und somit auch $0 = S^{-1}DS = A$, was ein Widerspruch ist. Also ist A nicht diagonalisierbar.

b)

Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte dasselbe charakteristische Polynom besitzen.
Sei A eine quadratische Matrix so gilt

$$f_A(x) = \det\left(x\ Id - A\right) = \det\left((x\ Id - A)^t\right) = \det\left(x\ Id - A^t\right) = f_{A^t}(x).$$

c)

Zeigen Sie, dass eine symmetrische $(2 \times 2)-$**Matrix über** $\mathbb{R}$ **stets diagonalisierbar ist.**
Sei $A := \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ eine symmetrische $(2 \times 2)-$Matrix, so ist das charakteristische Polynom $f_A(x) = x^2 - (a+b)x + ab - c^2$. Die reellen Nullstelle(n) lauten $x_{1/2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2+4c^2}{4}}$.
Betrachte nun die Diskriminante $D := (a-b)^2 + 4c^2$. Diese ist genau dann 0, wenn $c = 0$ und $a = b$ ist. Falls $D = 0$ gilt, so ist die Matrix bereits in Diagonalgestalt, andernfalls besitzt sie zwei verschiedene Eigenwerte, woraus die Diagonalisierbarkeit folgt.